Региональный этап

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.1. Шаровое скопление

В.Б. Игнатьев

Шаровое звездное скопление содержит 100 тысяч звезд светимостью $L = 0.5\ L_\odot$ каждая и 80 красных гигантов с абсолютной звездной величиной $M = -3^m$. Радиус скопления – 10 пк. Угловой размер скопления – $20'$. Определите:

A. Расстояние до скопления. Находится ли данное скопление в нашей Галактике?

B. Видимую звездную величину всего скопления.

Межзвездным поглощением и поглощением в земной атмосфере пренебречь.

Решение. Сначала ответим на **первый вопрос** задачи и определим расстояние до шарового скопления. Запишем формулу углового размера:

$$\rho'' = \frac{206265 \cdot D}{r} \qquad \text{или} \qquad \rho\ (\text{радиан}) = \frac{D}{r}$$

Здесь стоит обратить внимание, что угловой размер – это видимый угловой диаметр объекта. r – это искомое расстояние до объекта.

Выразим зависимость от расстояния и подставим значения:

$$r = \frac{206265 \cdot D}{\rho''} = \frac{206265 \cdot 20\ \text{пк}}{(20 \cdot 60)''} = 3440\ \text{пк}$$

Расстояние 3440 пк (или 3.4 кпк) меньше, чем радиус Галактики Млечный Путь (около 15 кпк) и радиус звездного гало нашей Галактики (до 30 кпк). Поэтому данное скопление относится к нашей Галактике.

Перейдем ко **второму вопросу** задачи. Скопление состоит из двух подсистем. Сначала определим звездную величину каждой из подсистем, а потом вычислим звездную величину всего скопления.

Сначала рассмотрим подсистему красных гигантов. Известна абсолютная звездная величина каждой звезды M_{RG} и число таких звезд $N_1 = 80$. Для определения суммарной звездной величины нужно складывать не сами звездные величины, а создаваемые звездами освещенности. Воспользуемся законом Погсона для абсолютных звездных величин и светимостей звезд:

$$M_1 - M_{RG} = -2.5 \lg \frac{E_\Sigma}{E_{RG}} = -2.5 \lg(N_1)$$

Подставив известные значения, получим абсолютную звездную величину подсистемы красных гигантов:

$$M_1 = M_{RG} - 2.5 \lg 80 = -3 - 2.5 \lg 80 = -9.5^m = -7.76^m$$

Видимую звездную величину получим, используя зависимость между видимой и абсолютной звездной величинами. Так как межзвездного поглощения нет, то она выглядит следующим образом

$$M - m = 5 - 5 \lg(r)$$

Отсюда

$$m_1 = M_1 - 5 + 5\lg(r) = -7.76 - 5 + 5\lg(3440) = 4.92^m$$

Теперь рассмотрим подсистему обычных звезд. Каждая звезда имеет светимость $0.5\ L_\odot$. Полная светимость L_1 такой подсистемы, состоящей из N_2 одинаковых звезд, будет равна

$$L_2 = N \cdot 0.5\ L_\odot = 10^5 \cdot 0.5\ L_\odot = 5 \cdot 10^4\ L_\odot$$

Далее видимую звездную величину можно получить двумя способами: через абсолютную звездную величину или через определение освещенности. Оба варианта равноправны. Покажем их оба.

(1) Выразим абсолютную звездную величину Солнца. Для этого запишем формулу Погсона для абсолютных звездных величин. В этом случае отношение освещенностей E будет равно отношению светимостей L, так как в определении абсолютных звездных величин мы считаем, что расстояние до объектов одинаковое (10 пк).

$$M_2 - M_\odot = -2.5\lg\frac{L_2}{L_\odot}$$

Из справочных данных возьмем абсолютную звездную величину Солнца $M_\odot = 4.79^m$.

$$M_2 = 4.79^m - 2.5\lg(5 \cdot 10^4) = -6.96^m$$

Для перехода между видимой и абсолютной звездными величинами воспользуемся формулой

$$M - m = 5 - 5\lg(r)$$

Отсюда

$$m_2 = M_2 - 5 + 5\lg(r) = -6.96^m - 5 + 5\lg(3440) = 5.72^m$$

(2) Рассмотрим второй вариант решения этого пункта. Освещенность объекта связана с его светимостью, как $E = L/4\pi r^2$. Следовательно можно определить освещеность объекта, а при использовании формулы Погсона сравнить освещенность объекта с освещенностью от известного нам объекта, например, Солнца.

$$m_2 - m_\odot = -2.5\lg\frac{E_1}{E_\odot} = -2.5\lg\frac{5 \cdot 10^4 \cdot L_\odot}{4\pi r^2 E_\odot}$$

В принципе, уже при такой записи все величины под логарифмом являются или табличными значениями или известными по ходу решения задачи. В справочных данных можно взять видимую звездную величину Солнца, светимость Солнца и солнечную постоянную $E_\odot$. Если же участнику сразу не очевидно, чему равна освещенность Солнца на удалении 1 а.е, ее можно выразить через светимость Солнца:

$$m_2 - m_\odot = -2.5\lg\frac{5 \cdot 10^4 \cdot L_\odot}{4\pi r^2 E_\odot} = -2.5\lg\frac{5 \cdot 10^4 \cdot L_\odot}{4\pi r^2 \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}} = -2.5\lg\frac{5 \cdot 10^4 \cdot a_\oplus^2}{r^2}$$

Такая запись позволит уменьшить вероятность арифметических ошибок, а при подстановке численных значений ее можно еще упростить:

$$m_2 = m_\odot - 2.5\lg\frac{5\cdot10^4\cdot(1/206265\text{ пк})^2}{(3440\text{ пк})^2} = m_\odot - 2.5\log\frac{5\cdot10^4}{206265^2\cdot3440^2} = -26.8^m + 32.51^m = 5.71^m$$

Теперь перейдем к определению видимой звездной величины всего скопления. У нас есть две подсистемы звезд, имеющие видимые звездные величины m_1 и m_2. Суммарную звездную величину будем определять, складывая освещенности, а не звездные величины.

$$E_\sum = E_1 + E_2$$

Запишем формулу Погсона:

$$m_\sum - m_2 = -2.5\lg\frac{E_\sum}{E_2} = -2.5\lg\frac{E_1+E_2}{E_2} = -2.5\lg(1+\frac{E_1}{E_2})$$

Отношение освещенностей E_1/E_2 можно выразить через формулу Погсона и звездные величины m_1 и m_2, которые уже известны.

$$m_\sum - m_2 = -2.5\lg(1+10^{-0.4(m_1-m_2)})$$

Подставляем значения:

$$m_\sum = 5.72^m - 2.5\lg(1+10^{-0.4(4.92-5.72)}) = 5.72^m - 2.5\lg(1+2.089) = 5.72^m - 1.22^m = 4.50^m$$

Обратим внимание, что при записи формулы Погсона можно сравнивать с любой из звездных величин $(m_1; m_2)$. Но, как правило, удобнее использовать более тусклый объект.

Критерии оценивания. **16**

К1. Запись формулы углового размера **1**

К2. Определение расстояние до скопления **3**

Ошибка в 2 раза из-за подстановки радиуса вместо диаметра 2

В случае, если расстояние найдено неверно, дальнейшее решение участника оценивается, исходя из значений, полученных участником. При этом максимальная оценка по критерию 4 остается без изменений

Если найденное расстояние получилось менее 10 пк (радиус скопления), оценка по критерию 4 равна 0 баллов. Никакие промежуточные баллы из данных критериев в этом случае не выставляются даже при их наличии и верном выполнении.

К3. Обоснованное утверждение, что скопление находится в Галактике Млечный путь **2**

Дан только правильный ответ без обоснования 1

К4. Определение видимой звездной величины скопления **10**

Запись формулы $M - m$ и расстояния 1

Подсистема красных гигантов. Определение абсолютной звездной величины 1

Определение видимой звездной величины подсистемы красных гигантов 2

Подсистема обычных звезд. Суммарная светимость 1

Подсистема обычных звезд. Абсолютная звездная величина (или освещенность) . . 1

Подсистема обычных звезд. Определение видимой звездной величины 2

Определение общей звездной величины скопления. Метод сложение освещенностей 1

Определение общей звездной величины скопления. Полученный численный ответ 1

10.2. Безнадежный побег

Е. Бойцов

Звезда имеет параллакс $\pi_0 = 0.1''$, лучевую скорость $v_r = -97.8$ км/с и полное собственное движение $\mu = 1.19''$/год. Земляне хотят запустить к звезде исследовательский зонд с минимально возможной скоростью. Какую минимальную скорость (на большом удалении от Солнца) должен иметь зонд, чтобы достичь звезды с выключенными двигателями? Под каким углом к современному направлению на звезду должна быть ориентирована такая минимальная скорость? Сколько будет длиться полёт зонда?

На рассматриваемом временном промежутке движение звезды относительно Солнца можно считать равномерным и прямолинейным.

Решение.

Какой бы ни была оптимальная траектория аппарата, чем больше времени мы имеем на её прохождение, чем меньше может быть минимальная скорость. Поэтому мы сразу считаем, что старт аппарата происходит «прямо сейчас», в нулевой момент времени.

Выразим современное расстояние до звезды:

$$r_0 = \frac{1\text{пк}}{\pi_0,''} = 10\text{пк}$$

и её трансверсальную скорость (компонента скорости, перпендикулярная лучу зрения, или, что то же самое, лежащая в картинной плоскости):

$$v_\tau = \frac{\mu,''/\text{год}}{\pi_0,''}\ \text{а.е./год} = 11.91\ \text{а.е./год} = 56.5\ \text{км/с}$$

Эту же величину можно получить, записав следующую формулу:

$$v_\tau = 4.74 \cdot \frac{\mu}{\pi} = 56.5\ \text{км/с}$$

Лучевая скорость отрицательна, это значит, что звезда приближается к нам, и в будущем будет пролетать мимо Солнца на расстоянии, меньшем, чем r_0. Поскольку трансверсальная скорость по модулю сравнима с лучевой, звезда не станет пролетать в ближайших окрестностях Солнца. Следовательно размерами области, в которой скорость зонда выходит на асимптотическое значение (максимум сотни а.е.), а также временем пребывания аппарата в этой области можно пренебречь.

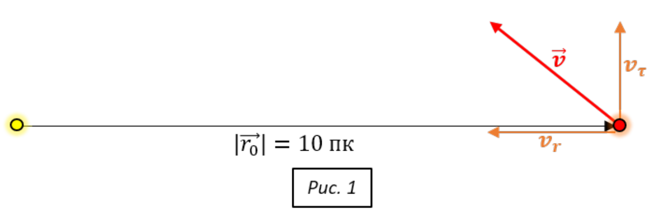


Рис. 1: Общая схема. Скорости звезды

Полную гелиоцентрическую скорость звезды обозначим за $\vec{v}$ (рис.1). Предложим вариант решения, в котором выражать модуль скорости или угол, образуемый ею с лучом зрения, вопреки очевидному желанию, мы не будем. Попробуем обойтись вычислением минимального количества величин.

Пусть аппарат движется со скоростью $\vec{v}_{\text{апп}}$ относительно Солнца. Тогда скорость звезды относительно аппарата будет равна разности векторов $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{апп}}$ (рис.2). Чтобы звезда и зонд в конечном счёте сблизились, относительная скорость звезды должна быть параллельна лучу зрения, то есть направлена от звезды на аппарат.

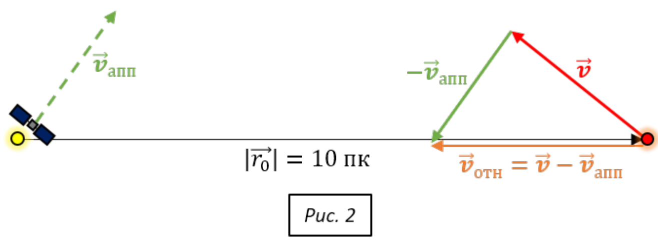


Рис. 2: Схема с относительными скоростями.

Нам нужно найти минимальную скорость аппарата, или, с геометрической точки зрения, найти минимальный «зеленый вектор», при котором относительная скорость сонаправлена с лучевой скоростью.

Наименьший по модулю из векторов $\vec{v}_{\text{апп}}$, удовлетворяющих нашему условию – это высота, опущенная из кончика вектора $\vec{v}$ на луч зрения (рис.3). Модуль вектора $\vec{v}_{\text{апп}}$ в этом случае равен v_τ. Таким образом, минимальная скорость аппарата, позволяющая долететь до звезды, равна $v_\tau = 56.5$ км/с. А двигаться с такой скоростью нужно перпендикулярно начальному направлению на звезду.

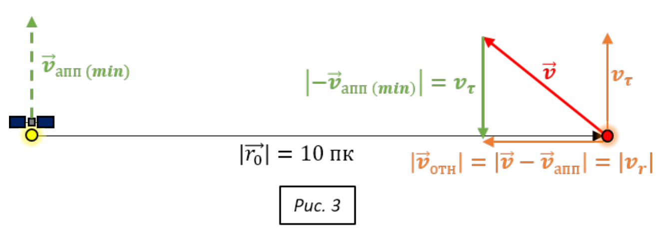
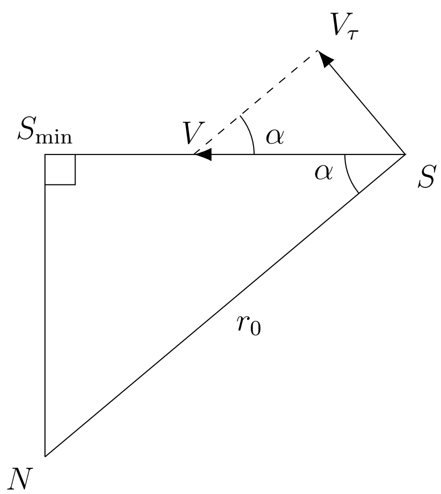


Рис. 3: Определение минимального значения вектора скорости

Осталось найти, сколько продлится полёт к звезде с такой минимально возможной скоростью. Из рисунка 3 можно заметить не только то, что $v_{\text{апп}} = v_\tau$, но и что $|v_{\text{отн}}| = |v_r|$, т.е. звезда будет сближаться с зондом со скоростью 97.8 км/с. Тогда мы можем легко выразить время полёта T:

$$T = \frac{r_0}{v_r} = 100 \text{ тыс. лет}$$

Кратко опишем **альтернативное** решение



Запишем выражение для расстояния $r(t)$ от наблюдателя N до произвольной точки на линии траектории звезды S через теорему косинусов:

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + (v \cdot t)^2 - 2 \cdot r_0 \cdot v \cdot t \cos\alpha}$$

Здесь v – полная скорость звезды, t – время, прошедшее с начального момента (момента старта), α – угол между направлением скорости и лучом зрения.

Разделим выражение для расстояния на время, получим выражение для скорости аппарата:

$$v_{\text{апп}}(t) = \sqrt{\frac{r_0^2}{t^2} + v^2 - 2\frac{r_0 \cdot v \cdot t\cos\alpha}{t^2}}$$

Из треугольника скоростей выразим $\cos\alpha = \frac{v_r}{v}$.

$$v_{\text{апп}}(t) = \sqrt{\frac{r_0^2}{t^2} + v^2 - 2\frac{r_0 \cdot v_r}{t}}$$

Теперь нужно найти минимум этой функции. Для этого нужно взять производную по времени и приравнять ее к нулю. Поскольку звезда к нам приближается, найденный экстремум будет являться минимумом.

Сделаем замену подкорневого выражения на z

$$v_{\text{апп}}(t) = \sqrt{z(t)}$$

$$v'_{\text{апп}}(t) = \frac{z'(t)}{2\sqrt{z(t)}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z'(t) = 0$$

$$z'(t) = -2\frac{r_0^2}{t^3} + 2\frac{r_0 \cdot v_r}{t^2} = 0$$

Отсюда

$$t = \frac{r_0}{v_r} = 100\,\text{тыс. лет}$$

Далее нужно проанализировать получившийся ответ. Если скорость сближения (относительная скорость) равна лучевой скорости звезды, то скорость аппарата должна быть равна трансверсальной скорости звезды и сонаправлена с ней.

Заметим, что альтернативное решение более требовательно к владению математикой (теорема косинусов и производные сложных функций). При этом оно дает только подсказку к вопросу нахождения направления скорости, а для полноценного ответа нужно работать с векторами.

Ответ: минимальная скорость, достаточная для полёта к звезде, равна 56.5 км/с, должна быть ориентирована под углом 90° к современному направлению на звезду, и позволит долететь до светила за 100 тысяч лет.

Потенциальная ошибка участника. Предположение, что минимальная скорость аппарата будет при минимальном расстоянии. В этом случае критерии 5 и 6 оцениваются в 0 баллов, а критерий 7 – максимум в 1 балл за определение минимального расстояния пролета, хоть оно и не является верным. То есть максимальная оценка за такое решение будет 7 баллов.

Критерии оценивания. **16**

К1. Определение расстояния до звезды r_0 . . . . **2**

К2. Определение величины трансверсальной скорости **2**

К3. Пренебрежение временем изменения скорости в поле тяжести Солнца **1**

В случае, если участник подумал, но данные размышления не записал в решение, то за данный пункт балл не выставляется. Следующие этапы оцениваются в полной мере при правильности их решения. Данный пункт оценивается только в случае его явной записи.

К4. Верное направление лучевой скорости из знака v_r **1**

Звезда приближается к Солнцу, не нужно отправлять аппарат вдогонку

К5. Определение минимальной скорости аппарата **4**

Аналитическое или векторное определение условия минимума 3

Обоснование, что $v_{min} = v_\tau$ 1

К6. Значение угла направления аппарата **2**

К7. Нахождение времени полета аппарата **4**

Верное выражение для расстояния до точки встречи 1

Верное выражение для относительной скорости 1

Итоговый расчет 2

Если участник считает, что условие задачи выполняется при минимальном расстоянии К.7 - 1 балл

10.3. Световой день Тихо

В. Б. Игнатьев

Лунный кратер Тихо имеет селенографические координаты 43° ю.ш. и 11° з.д. Его диаметр составляет 85 км, а глубина в центре кратера – 4700 метров. Определите длительность светового дня в центре кратера Тихо. Считайте, что плоскость лунной орбиты совпадает с плоскостью эклиптики и с плоскостью лунного экватора, орбиты Луны и Земли можно считать круговыми. Световой день начинается с момента восхода верхнего края диска Солнца. Рельефом внутри кратера пренебречь.

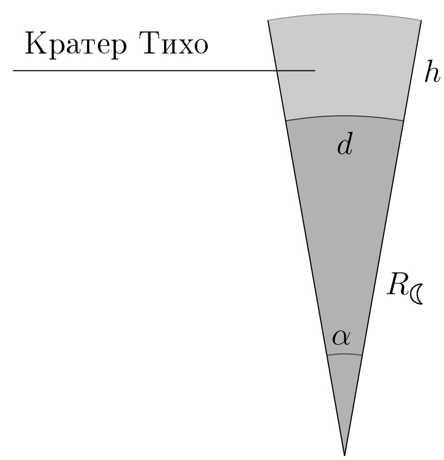
Через какое время после того, как на Земле наступило новолуние, в центре кратера Тихо начнется восход Солнца?

Решение.

Длительность светового дня зависит от двух факторов: длительности солнечных суток на Луне и углового расстояния на небесной сфере, которое проходит Солнце с точки зрения наблюдателя.

Сначала найдем длительность солнечных суток на спутнике Земли. Солнечные сутки – это синодический период, который складывается из периода движения Луны вокруг Солнца (период обращения Земли по своей орбите) и периода вращения Луны вокруг своей оси. Заметим, что Луна синхронизирована с Землей, то есть повернута к ней всегда одной стороной. Следовательно, период обращения Луны вокруг Земли равен периоду ее осевого вращения. Таким образом, нам нужно подставить в стандартную формулу синодического периода период движения Земли по своей орбите вокруг Солнца ($T_\oplus = 1$ год) и период движения Луны по своей орбите вокруг Земли ($T_☾ = 27.32$ суток). После подстановки получаем, что солнечные сутки равны синодическому периоду Луны, то есть $S_{cc} = 29.53$ суток.

Теперь определим угловое расстояние, которое Солнце пройдет по небесной сфере для наблюдателя на Луне. Согласно условию задачи, плоскость орбиты Луны совпадает с эклиптикой и лунным экватором. Следовательно, саму ось вращения Луны мы считаем перпендикулярной плоскости ее орбиты, то есть наклонение оси Луны у нас равно 0°. Для наблюдателя в любой точке на Луне Солнце за солнечные сутки проходит дугу в 180 градусов над горизонтом и дугу в 180 градусов под горизонтом, если не учитывать поправки, связанные с угловым размером Солнца и с понижением горизонта.



Теперь рассмотрим эффекты, из-за которых длительность светового дня будет отличаться от половины солнечных суток. Первый эффект – ненулевой угловой размер Солнца. Он увеличивает длительность светового дня. Второй эффект связан с положением наблюдателя в центре лунного кратера. Тут необходимо учесть понижение горизонта, а также тот факт, что часть небосвода может быть закрыта стенками кратера. Это может как уменьшить, так и увеличить световой день, в зависимости от того, какая часть небосвода открыта наблюдателю.

Рассмотрим эффект, который уменьшает световой день, – повышение горизонта, вызванное глубиной

кратера. Поскольку нам известен диаметр кратера, то
мы можем определелить угол, под которым кратер виден из центра Луны:

$$d = \alpha_{\text{рад}} \cdot (R_☾)$$

$$\alpha^\circ = \frac{d}{R_☾} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{85}{1738} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 2.8^\circ$$

Теперь определим повышение горизонта для наблюдателя. Также учтем, что наблюдатель имеет некоторый рост l, который для оценки возьмем равным 1.8 метра – средний рост человека. Использование участниками величины роста человека от 1.5 до 2 метров считается нормальным.

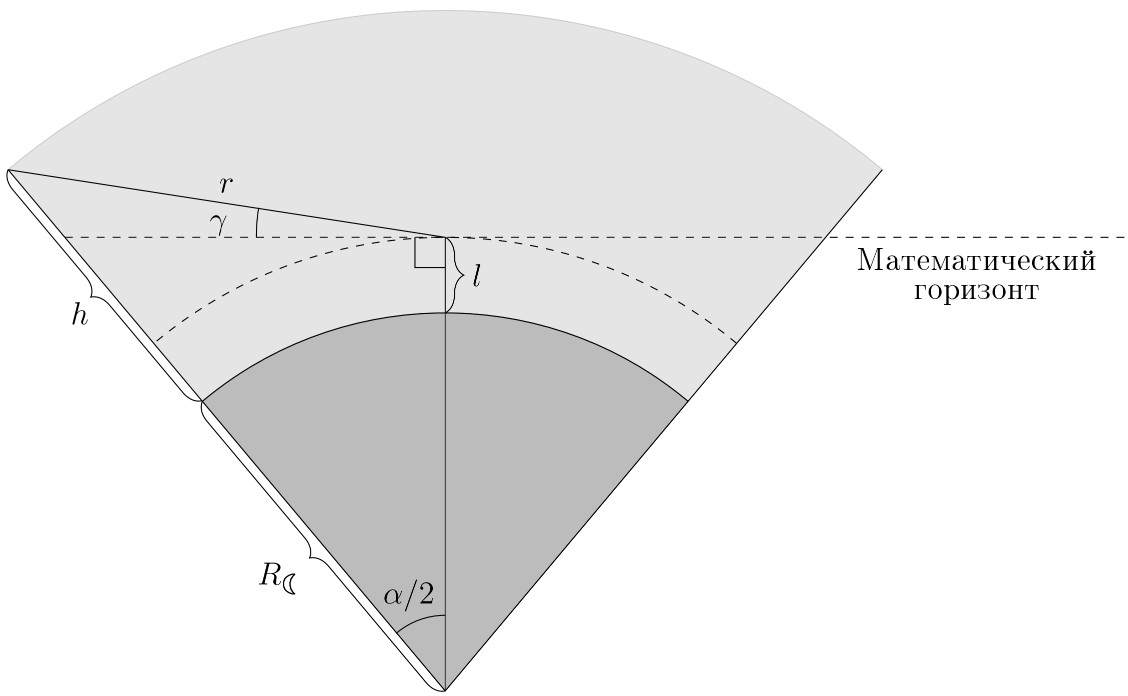


Рис. 4: Схема

Рассмотрим рисунок 4. Темно-серая заливка – это Луна. Светло-серая заливка – лунный кратер высотой h. В центре кратера стоит наблюдатель ростом l. Из его глаза перпендикулярно отвесной линии обозначена плоскость математического горизонта. Нам нужно определить угол γ, на который уменьшается видимая часть небосвода с одной стороны, например, со стороны восхода Солнца.

Используя теорему косинусов, найдем длину горизонта r:

$$r = \sqrt{(R_☾ + l)^2 + (R_☾ + h)^2 - 2(R_☾ + l)(R_☾ + h)\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \sqrt{(1738 + 0.0018)^2 + (1738 + 4.7)^2 - 2 \cdot (1738 + 0.0018) \cdot (1738 + 4.7) \cdot \cos\frac{2.8}{2}} = 42.8 \text{ км}$$

Угол γ – повышение горизонта. Найдем его значение, записав теорему синусов:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{r} = \frac{\sin(90^\circ + \gamma)}{R_{☾} + h}$$

$$\cos\gamma = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{R_{☾} + h}{r}$$

$$\gamma = \arccos\left(\sin(1.4^\circ) \cdot \frac{1738 + 4.7}{42.8}\right) = 5.84^\circ$$

Здесь стоит обратить внимание, что кратер Тихо достаточно большой, и пренебрегать в нем понижением горизонта из-за конечных размеров Луны не стоит. Вероятная ошибка, которую может сделать участник, – посчитать, что горизонт на Луне плоский, тогда стенка кратера будет возвышаться на величину 6.3°. В реальности из-за того, что часть высоты стенки кратера находится под плоскостью математического горизонта, стенка кратера для наблюдателя в его центре возвышается на величину 5.84°.

По условию задачи световой день начинается в тот момент, когда наблюдатель видит верхний край диска Солнца. В модели, где Солнце находится над горизонтом ровно половину солнечных суток, мы считаем Солнце точкой, сосредоточенной в его центре. Значит, необходимо учесть угловой радиус Солнца, который для наблюдателя на Луне, как и на Земле, равен 0.27 градуса. Этот эффект увеличивает световой день. Если бы не было повышения горизонта, то световой день был бы равен $\frac{180^\circ + 2\cdot 0.27^\circ}{360^\circ} \cdot S_{cc}$, что больше половины солнечных суток.

Определим суммарный эффект изменения угла на небе:

$$\beta = \gamma - \rho_{\odot} = 5.84^\circ - 0.27^\circ = 5.57^\circ$$

Теперь найдем время, за которое Солнце взойдет на угол β над горизонтом. Поскольку все наблюдения происходят вблизи горизонта, и Солнце двигается по большому кругу, то можно воспользоваться плоским приближением. На рисунке 5 изобразим математический горизонт и линию высоты Солнца, при которой начинается световой день. Так как широта места наблюдения южная, то Солнце будет двигаться справа налево. Поскольку Солнце находится на небесном экваторе, оно будет заходить за горизонт под углом $90^\circ - \varphi$.

Определим расстояние, которое пройдет Солнце по небесному экватору, пока поднимется на угол β над горизонтом:

$$L = \frac{\beta}{\cos\varphi}$$

Солнце двигается с угловой скоростью $\omega_0 = \frac{360^\circ}{S_{cc}}$. Выразим время, за которое Солнце пройдет расстояние L:

$$t = \frac{L}{\omega_0} = \frac{\beta}{\cos\varphi \cdot \omega_0} = \frac{5.57^\circ}{\frac{360^\circ}{29.53} \cdot \cos(-43^\circ)} = \frac{5.57^\circ}{360^\circ \cdot \cos(-43^\circ)} \cdot 29.53 \text{ дня} = 0.62 \text{ дня}$$

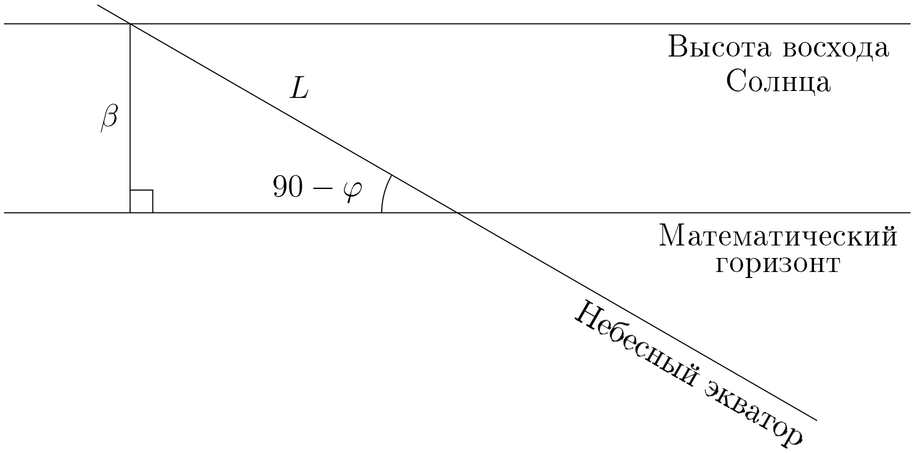


Рис. 5: Схема плоского приближения восхода Солнца на Луне

Заметим, что вычисленный эффект наблюдается, как на восходе Солнца, так и на заходе. Следовательно, уменьшение времени нужно учесть два раза. Тогда итоговая длительность светового дня составит

$$T = \frac{S_{cc}}{2} - 2t = \frac{29.53}{2} - 2 \cdot 0.62 = \boxed{13.51 \text{ суток}}$$

Теперь ответим на второй вопрос. Селенографические координаты отсчитываются от центра видимого диска Луны. Следовательно, через четверть синодического периода начнется восход Солнца на центральном меридиане Луны. Поскольку наблюдатель находится западнее меридиана на 11 градусов, а Солнце двигается с востока на запад, то восход на долготе наблюдателя начнется на Δt позже. Определим Δt:

$$\Delta t = \frac{11^\circ}{360^\circ} \cdot S_{☾} = \frac{11^\circ}{360^\circ} \cdot 29.53 = 0.90 \text{ суток}$$

Тогда восход Солнца на меридиане 11° западной долготы начнется через $t = \frac{S_{☾}}{4} + \Delta t = \frac{29.53}{4} + 0.9 = 8.28$ суток. Заметим, что в кратере Тихо восход Солнца наступит позже на $t = 0.62$ суток, то есть $\boxed{\text{через } 8.28 + 0.62 = 8.90 \text{ суток после новолуния}}$.

Критерии оценивания. **16**

К1. Определение солнечных суток на Луне **1**

Если за длительность солнечных суток берется орбитальный период Луны (27.32 дня), то оценка по критерию 5 – максимум 2 балла, а критерий 6 оценивается в 0 баллов.

К2. Утверждение, путь Солнца над горизонтом равен пути под горизонтом **1**

Или аналогичное утверждение, что световой день равен половине солнечных суток без учета угловых размеров Солнца и понижения горизонта

К3. Определение величины повышения горизонта в центре кратера **4**

Данный пункт может быть реализован разными способами

Ошибка больше 3° . . . . max 1

В случае, если рассмотрен случай «плоской» Луны (6.3°) . . . . ≤ 2

К4. Учет углового радиуса Солнца **2**

К5. Определение длительности светового дня с точностью 0.1 суток **4**

Использование метода плоского приближения 1

Учтена широта кратера 2

В случае, если этот пункт не учтен, балл снимается только в 5-ом критерии, на оценку критерия 6 (в последнем подпункте) он не влияет

Если эффект повышения учтен два раза, на восходе и заходе Солнца 1

К6. Определение момента восхода Солнца после новолуния с точностью 0.1 суток **4**

Правильное понимание селенографических координат 1

Определение момента восхода Солнца на долготе 11 з.д. 1

Учет запаздывания восхода Солнца в центре кратера 1

Финальный ответ с точностью 0.1 суток 1

10.4. Сказания о проницающей способности

М.В. Кузнецов

Наблюдатель использует телескоп и два окуляра ($f_1 = 10$ мм, $f_2 = 40$ мм) для наблюдения рассеянных звездных скоплений. При наблюдении с большим увеличением наблюдатель заметил, что предельная звездная величина составила 13.6^m, а при наблюдении в окуляр с меньшим увеличением – 13.0^m. Чему равны относительное отверстие, диаметр и фокусное расстояние объектива этого телескопа?

Решение.

В общем случае формулу для проницающей способности визуального телескопа можно записать следующим образом:

$$m_{lim} = 6^m + 5\log\frac{D}{d_{out}} = \begin{cases} 6^m + 5\log\frac{D}{d} = 2.1^m + 5\log(D \text{ мм}), & \Gamma > \frac{D}{d_{out}} \\ 6^m + 5\log\frac{F}{f} = 6^m + 5\log\Gamma, & \Gamma \leq \frac{D}{d_{out}} \end{cases}$$

Здесь D – диаметр объектива телескопа, d – диаметр зрачка глаза, d_{out} – диаметр выходного пучка света из окуляра, F – фокусное расстояние объектива, f – фокусное расстояние окуляра. Диаметр зрачка глаза человека в темноте примерно равен 6 мм, а предельная звездная величина для человеческого глаза равна 6^m.

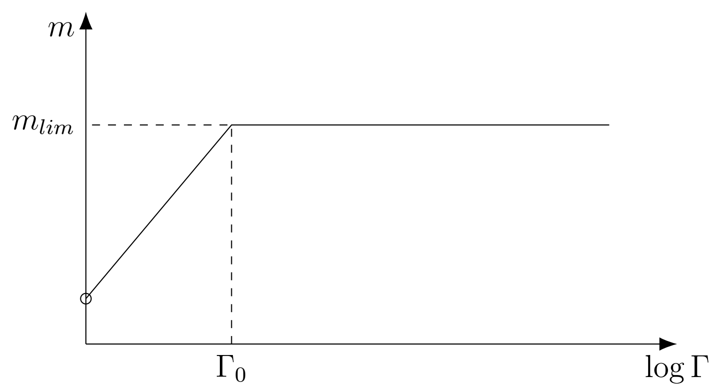


Рис. 6: Зависимость проницающей способности телескопа от увеличения окуляра. Удобно использовать логарифмическую шкалу для увеличения.

Равнозрачковым называется такое увеличение телескопа, при котором диаметр выходного пучка света равен диаметру зрачка глаза:

$$\Gamma_0 = \frac{D}{d_{out}}$$

Такая зависимость предельной звездной величины может быть получена из следующих соображений:

Если увеличение телескопа (Γ) больше, чем равнозрачковое, весь собранный телескопом свет попадает в глаз наблюдателя, и проницающая способность ограничивается возможностями человеческого глаза. Для этого случая используем формулу Погсона в виде

$$m_{lim} = 2.1 + 5\log(D \text{ мм}). \tag{1}$$

При увеличении, меньшем равнозрачкового, диаметр выходного пучка света из окуляра больше, чем размер зрачка, и в глаз наблюдателя попадает не весь собранный телескопом свет, а только его часть, что приводит к уменьшению проницающей способности. Для такого случая проницающая способность определяется размером выходного пучка и, следовательно, коэффициентом увеличения телескопа:

$$m_{lim} = 6 + 5\log\Gamma \tag{2}$$

При увеличении, равном равнозрачковому, обе формулы дают одинаковый результат.

Поскольку проницающая способность при использовании обоих окуляров разная, ситуация, когда они оба дают увеличение больше равнозрачкового, невозможна. Как минимум, один из окуляров имеет увеличение меньше Γ_0. Но из условия задачи неизвестно, будет ли увеличение меньше равнозрачкового для обоих окуляров, или только для одного из них.

Проверим гипотезу, что коэффициенты увеличения обоих окуляров меньше равнозрачкового.

Отношение фокусных расстояний окуляров равно 4. Следовательно, отношение увеличений, которые можно получить на этом телескопе с данными окулярами, также равно 4.

Запишем разность предельных звездных величин для двух окуляров в этом случае.

$$m_1 - m_2 = 5\log\Gamma_1 - 5\log\Gamma_2 = 5\log\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = 5\log 4 = 3.01^m$$

Но по условию задачи разность предельных звездных величин составляет всего 0.6^m. Значит, наша гипотеза, что оба увеличения меньше равнозрачкового, не подтверждается.

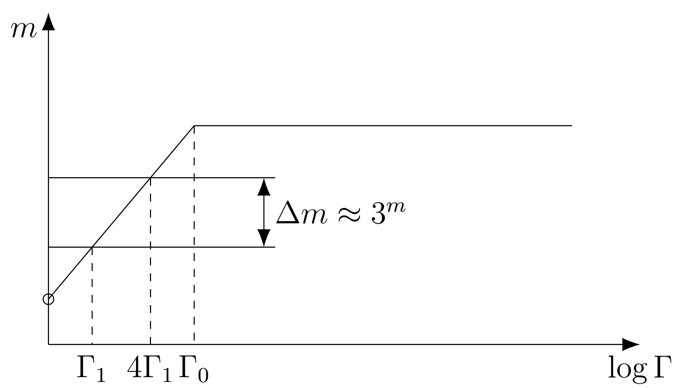


Рис. 7: Рисунок, поясняющий гипотезу, что оба увеличения меньше, чем равнозрачковое Γ_0

Тогда предельная звездная величина 13.6^m – это предельная звездная величина при диаметре выходного пучка, равном или меньшем, чем диаметр зрачка.

Из первой формулы можем сразу получить значение диаметра объектива телескопа:

$$D = 6\cdot 10^{\frac{m_1-6}{5}} \approx 200 \text{ мм}$$

Теперь осталось определить фокусное расстояние объектива. Это можно сделать несколькими способами.

Вариант 1. Запишем систему уравнений для предельных звездных величин:

$$\begin{cases} m_1 = 6 + 5\log\left(\frac{D}{6}\right) \\ m_2 = 6 + 5\log\left(\frac{F}{f_2}\right) \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнение второе

$$m_1 - m_2 = 5\log\left(\frac{D}{6}\right) - 5\log\left(\frac{F}{f_2}\right) = 5\log\left(\frac{D}{6}\cdot\frac{f_2}{F}\right) = 5\log\left(A\cdot\frac{f_2}{6}\right)$$

Здесь A – относительное отверстие телескопа. Пропотенцируем предыдущее выражение:

$$A\cdot\frac{f_2}{6} = 10^{0.2(m_1-m_2)}$$

Разность предельных звездных величин мы можем найти из условия задачи.

$$A = 10^{0.2(13.6-13.0)}\cdot\frac{6}{10} \approx \frac{1}{5}$$

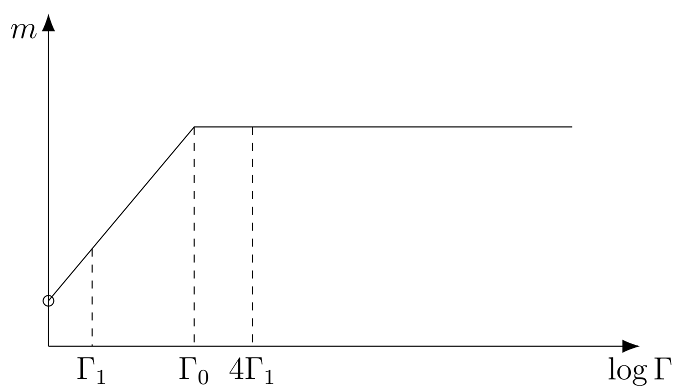


Рис. 8: Случай, реализованный в задаче

Следовательно, фокусное расстояние объектива можно выразить как

$$F = \frac{D}{A} = 5\cdot D = 1000 \text{ мм}$$

Вариант 2. Рассмотрим формулу (2) более внимательно.

$$m_{\text{пр}} = m_2 = 6 + 5\log\Gamma = 6 + 5\log\left(\frac{F}{f_2}\right)$$

В принципе все величины этого уравнения, кроме искомого F, известны. Выразим:

$$\frac{F}{f_2} = 10^{0.2(m_2-6)}$$

$$F = f_3 \cdot 10^{0.2(13.0-6)} = 1000 \text{ мм}$$

Критерии оценивания. **16**

К1. Верное написанное объяснение, почему разные предельные звездные величины **2**
В случае, если участник подумал, но данное размышление не записал в решение, то за данный пункт балл не выставляется. А следующие этапы оцениваются в полной мере при правильности их решения.

К2. Записи выражений для предельной звездной величины в обоих случаях . . . . **2× 1**

К3. Проверка случая, что обе ситуации не могут быть при неравнозрачковом увеличении . **4**
Без проверки данного случая дальнейшие критерии численно правильного решения оцениваются максимум в 5 баллов (1+1+3)

К4. Определение диаметра объектива телескопа **2**
Допустимая точность 200 ± 5 мм

К5. Определение относительного отверстия телескопа **2**

К6. Определение фокусного расстояния объектива телескопа **4**

10.5. Тройная фаза

В.Б. Игнатьев

Объект Солнечной системы сферической формы наблюдается с Земли на угловом удалении γ от Солнца, при этом его фаза равна Φ_1. В следующий раз наблюдаемый объект снова оказался на угловом удалении γ от Солнца через $\frac{1}{4}$ года, при этом его фаза Φ_2 оказалась ровно в 3 раза больше, чем Φ_1. На основании этих данных определите:

A. Радиус орбиты наблюдаемого объекта.

B. Угловое удаление объекта от Солнца в момент первого наблюдения – угол γ.

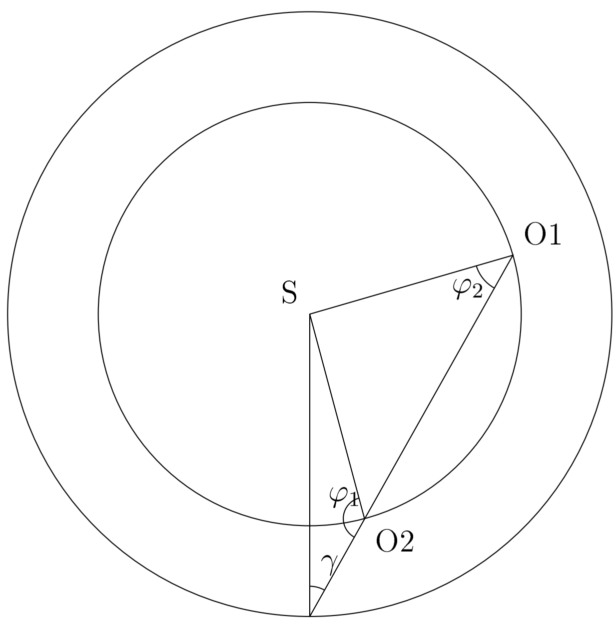
C. Какая была видимость у объекта в момент первого наблюдения – утренняя или вечерняя? Приведите подробный анализ.

Орбита объекта лежит в плоскости эклиптики и является круговой. Объект обращается вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля.

Решение.

Наблюдаемый объект является внутренним по отношению к Земле. Действительно, любой внешний объект для земного наблюдателя будет иметь значение фазы от 0.5 до 1, поэтому получить значение двух фаз, отличаюшихся ровно в три раза, для внешнего объекта не получится. А для внутренних объектов такого ограничения нет.

Нарисуем схему, поясняющую задачу.



Точка S – Солнце, T – Земля, O_1 и O_2 – наблюдаемый объект в двух своих положениях.

Пока не будем отвечать на последний вопрос задачи и предположим, что в обоих случаях объект наблюдался к западу от Солнца. Анализ вариантов расположения проведем ниже.

Обратим внимание, что треугольник SO_1O_2 – равнобедренный, так как орбита объекта круговая, и $SO_1 = SO_2$.

Тогда фазовые углы φ_1 и φ_2 являются дополнительными друг к другу. Запишем формулу, связывающую фазу и фазовый угол:

$$\Phi = \frac{1 + \cos\varphi}{2}$$

Из условия задачи

$$3\Phi_1 = \Phi_2$$
$$3\frac{1 + \cos\varphi_1}{2} = \frac{1 + \cos\varphi_2}{2}$$
$$3 + 3\cos\varphi_1 = 1 + \cos\varphi_2$$

Теперь воспользуемся тем, что фазовые углы являются дополнительными. Тогда $\cos\varphi_1 = \cos(180° - \varphi_2) = -\cos\varphi_2$.

$$3 - 3\cos\varphi_2 = 1 + \cos\varphi_2 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1}{2}$$

Отсюда угол $\varphi_2 = 60°$. Так как углы при основании треугольника равны между собой и равны $60°$, треугольник ΔSO_1O_2 получается равносторонним, и угол при Солнце $O_1SO_2 = \Delta\lambda = 60°$

Еще раз внимательно посмотрим на схему, поясняющую нашу задачу. На этой схеме у нас «зафиксированы» положения Солнца и Земли, а внутренний объект продолжает свое движение вокруг Солнца. В такой системе отсчета внутрениий объект сделает полный оборот за синодический период.

За четверть года объект прошел дугу длиной $60°$, следовательно, полный оборот он сделает за

$$S = \frac{360°}{60°}\Delta t = 6\Delta t = 1.5 \text{ года}$$

Зная синодический период, можно сначала найти сидерический период, а затем и полуось орбиты. Выполним эти расчеты. По условию задачи все тела двигаются в одну сторону, поэтому запишем синодическое уравнение со знаком «минус». Также учтем, что объект внутренний.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_\oplus}$$
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_\oplus} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{S \cdot T_\oplus}{S + T_\oplus} = 0.6 \text{ года}$$

Значение полуоси орбиты найдем из третьего закона Кеплера, сравнив орбиту наблюдаемого объекта с орбитой Земли. Получим $a = 0.71$ а.е.

Перейдем **ко второму вопросу** задачи. На рисунке рассмотрим любой из треугольников ΔSTO_1 или ΔSTO_2. Запишем теорему синусов для любого из этих треугольников, например, для для ΔSTO_2:

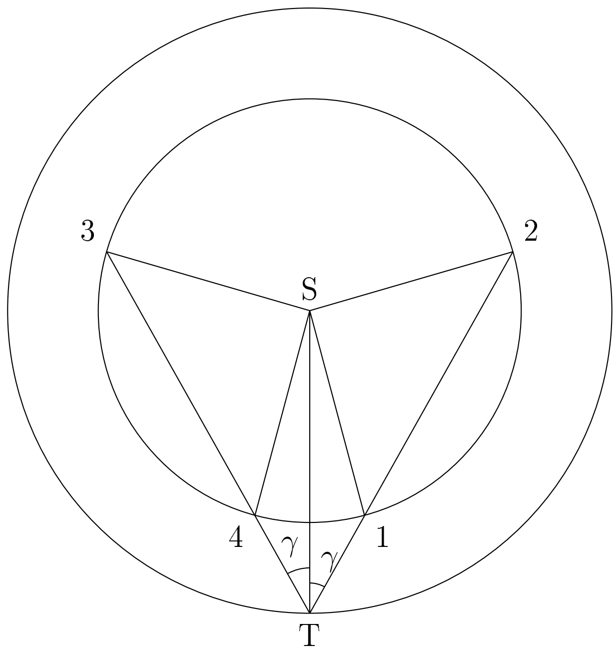
$$\frac{a_\oplus}{\sin\varphi_2} = \frac{a}{\sin\gamma}$$

Здесь известны все величины, кроме искомого угла γ.

$$\sin\gamma = \frac{a}{a_\oplus}\sin\varphi_2$$

Отсюда угол $\gamma = 38°$. Нам подходит только острый угол. Поскольку углы φ_1 и φ_2 дополнительные, их синусы равны, и точно такой же ответ можно получить из анализа треугольника ΔSTO_1.

Перейдем к **анализу последнего пункта** задачи.



На рисунке обозначим точки, в которых может оказаться объект на угловом удалении γ от Солнца. Всего таких точек в общем случае должно быть 4. Правда, возможны «вырожденные» случаи, когда точек будет только 2 – это ситуации максимумов элонгаций или соединений. Но оба этих вырожденных случая не подходят к условию задачи – в случае с максимумами элонгаций фаза будет равна 0.5 и получить значение фазы в три раза больше невозможно. В случае соединений в нижнем соединении фаза равна 0, а в следующем (верхнем) соединении фаза будет равна 1. Отношение этих фаз также не равно 3, что противоречит условию задачи.

Поскольку объект внутренний и имеет круговую орбиту, его угловая скорость всегда больше угловой скорости Земли (наблюдателя). Следовательно, объект будет последовательно проходить чеоез точки 1, 2, 3 и 4. Нужно проанализировать, какой (или какие) из переходов может соответствовать условиям задачи.

Переходы $2 \to 3$ и $4 \to 1$ нам не интересны, так как фазы в обеих точках будут одинаковы. Поэтому осталось рассмотреть переходы $3 \to 4$ и $1 \to 2$. В первом случае $(3-4)$ фаза уменьшается, а во втором случае фаза увеличивается. По условию задачи фаза как раз должна увеличиваться, следовательно, нам подходит только переход $1 \to 2$. Он соответствует утренней видимости объекта.

Критерии оценивания. **16**

K1. Объект является внутренним **2**

K2. Запись выражения для фазы и фазового угла **1**

K3. Прямое утверждение о связи углов φ_1 и φ_2 – их сумма равна 180° **1**

K4. Определение одного из фазовых углов **1**

K5. Определение угла O_1SO_2 . . . . . **1**

K6. Определение синодического периода **1**

K7. Определение сидерического периода **1**

K8. Определение полуоси объекта с точностью 0.04 а.е. **2**

K9. Определение угла γ с точностью до 2° **2**

При точности хуже 10° или тупом угле 0

K10. Анализ видимости объекта **4**

Только правильный ответ 1

Рассмотрены 4 точки 2

но вращение происходит в другую сторону или не верно выбрано изменение фазы

10.6. Комета C/2023 A3 (Tsuchinshan-Atlas) у горизонта

Ю.П. Филиппов

На рисунке (следующая страница) представлена фотография (черно-белый негатив) яркой кометы C/2023 A3 (Tsuchinshan-Atlas), полученная в момент прохождения Земли через плоскость ее орбиты 14 октября 2024 года в 20 часов 00 минут по всемирному времени. На фотографию наложена сетка экваториальных координат, проведена линия математического горизонта и указаны три наиболее ярких звезды в окрестности точки наблюдения (с усилением их яркости). В таблице ниже представлены экваториальные координаты этих звезд.

Название	Прямое восхождение	Склонение
Звезда 1: 109 Vir	$14^h47^m29^s$	$01°47'25''$
Звезда 2: 11 Lib	$14^h52^m17^s$	$-2°24'02''$
Звезда 3: 110 Vir	$15^h04^m08^s$	$1°59'45''$

Определите:

A. Угловые размеры участка неба, запечатленного на фотографии, и погрешности их определения.

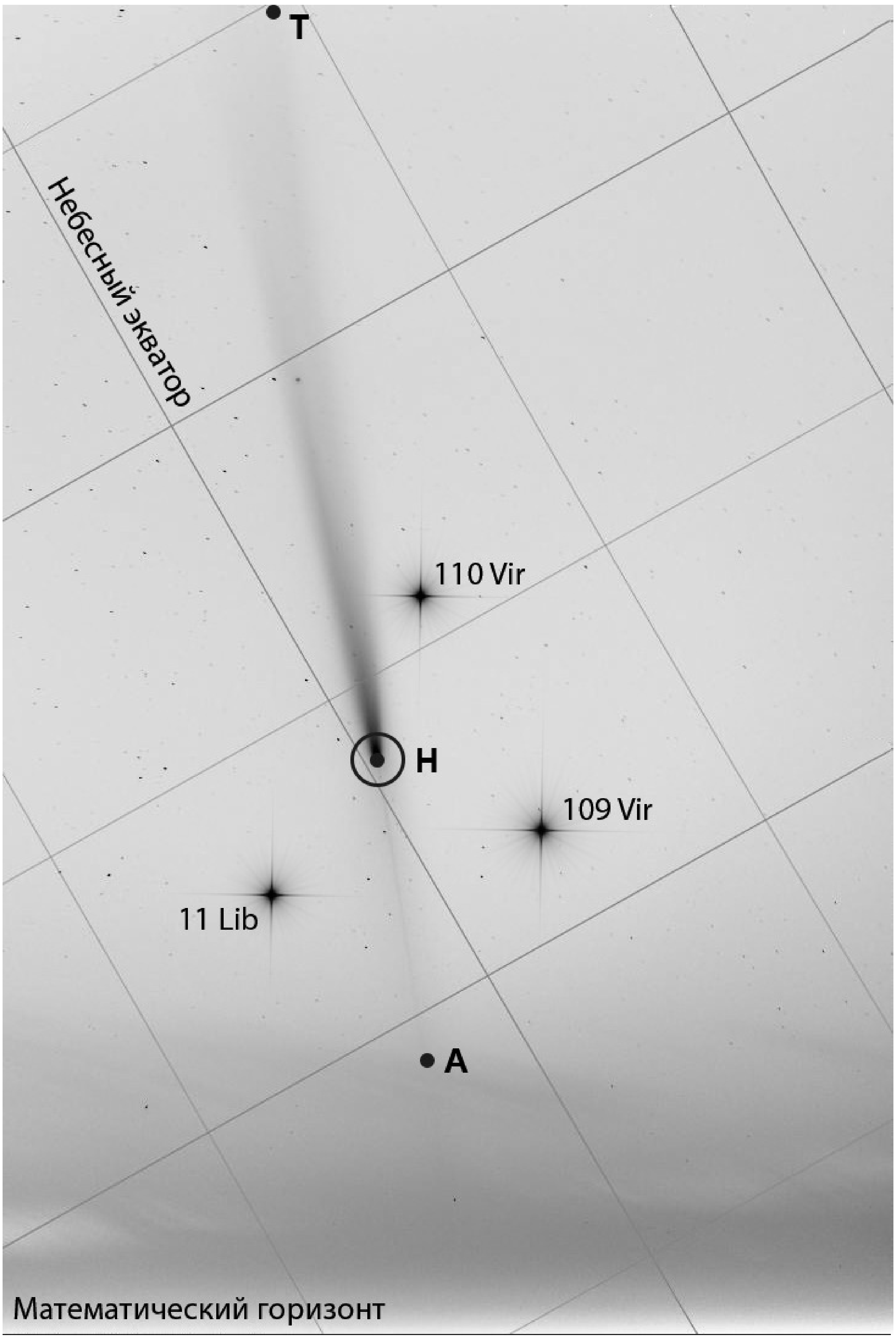
B. Время суток, когда была выполнена фотосъемка

C. Географические координаты места фотосъемки кометы и погрешности их определения.

Осеннее равноденствие в 2024 году наступило 22 сентября в 12 часов 44 минуты по всемирному времени. Уравнением времени в расчетах следует пренебречь.

Нижняя кромка кадра совпадает с математическим горизонтом; указано положение небесного экватора, головы кометы (H), наиболее протяженной видимой части (HT) пылевого хвоста кометы, видимой части антихвоста кометы (HA), ориентированного строго «на Солнце».

При расчете погрешностей определения искомых величин в качестве абсолютной погрешности измерения длины какого-либо отрезка на фотографии следует принимать цену деления линейки (1 мм).


T
Небесный экватор
110 Vir
H
109 Vir
11 Lib
A
Математический горизонт

Решение. Для начала определим, в какое время суток была проведена сьемка. На фотографии мы видим одну из точек пересечения небесного экватора с горизонтом. Это либо точка востока, либо точка запада. Поскольку небесный экватор проходит из верхнего левого в нижний правый угол кадра, точка пересечения может быть либо точкой востока при наблюдении из южного полушария, либо точкой запада в северном полушарии.

По значениям склонений указанных на фотографии звезд можно понять, что в левой части горизонта расположено южное небесное полушарие (склонение звезды 11 Lib отрицательно), а в правой части – северное (склонения звезд 109 Vir и 110 Vir положительны), то есть точка севера будет справа по горизонту от рассматриваемой точки, а северный полюс мира – над горизонтом. Следовательно, наблюдатель находится в северном полушарии и видит окрестности точки запада. Участок неба расположен в западной части горизонта, снимок сделан вечером после захода Солнца.

Чтобы ответить на все следующие вопросы задачи нам необходимо определить угловой масштаб изображения μ. Для этого воспользуемся линейкой.

Рассмотрим треугольник из данных звезд. Заметим, что угловые размеры его сторон небольшие, значит, данный треугольник можно считать плоским. При этом треугольник находится буквально на небесном экваторе. Определим угловые размеры сторон треугольника с использованием теоремы Пифагора и линейные их размеры на фотографии:

$$\theta_{12} = \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + 15^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)^2} = 4.359^\circ$$
$$\theta_{23} = \sqrt{(\delta_C - \delta_B)^2 + 15^2 \cdot (\alpha_C - \alpha_B)^2} = 5.301^\circ$$
$$\theta_{13} = \sqrt{(\delta_3 - \delta_1)^2 + 15^2 \cdot (\alpha_3 - \alpha_C)^2} = 4.167^\circ$$

В этих формулах коэффициент 15^2 возник при переводе часовой меры угла (для прямого восхождения) в градусную меру угла. Поскольку все звезды находятся всего в нескольких градусах от небесного экватора, множитель $\cos\delta$ настолько близок к единице, что его можно не учитывать.

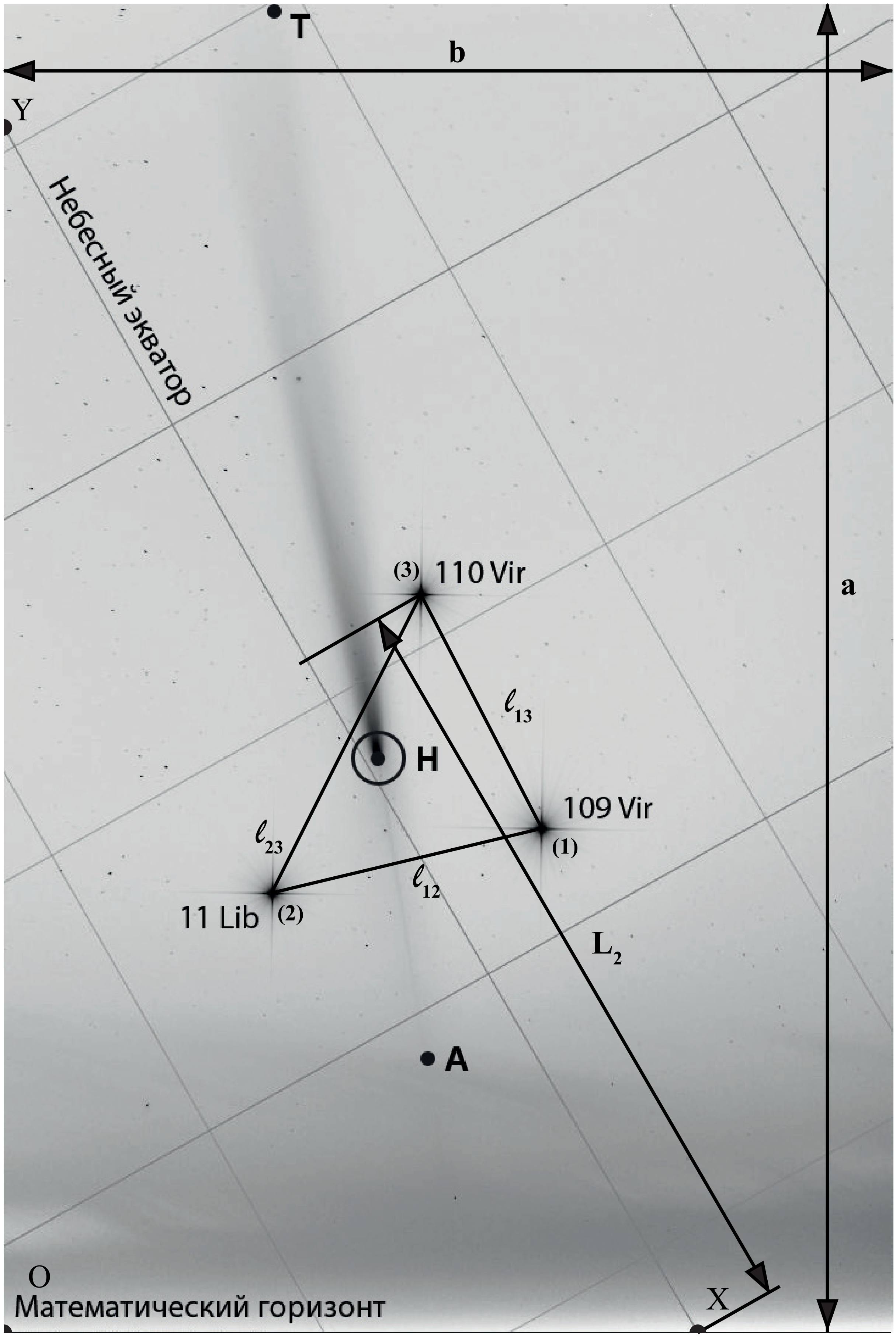
Линейные размеры[1]

$$\ell_{12} = 46 \pm 1 \text{ мм}$$
$$\ell_{23} = 55 \pm 1 \text{ мм}$$
$$\ell_{13} = 43 \pm 1 \text{ мм}$$

Найдем масштаб и погрешность его измерения, используя формулу $\Delta\mu_{12} = \theta_{12}\frac{\Delta\ell_{12}}{\ell_{12}}$

$$\mu_{12} = \frac{\theta_{12}}{\ell_{12}} = \frac{4.359^\circ}{46} = 0.095\frac{\circ}{\text{мм}} = 5.686\frac{'}{\text{мм}}$$
$$\mu_{23} = \frac{\theta_{23}}{\ell_{23}} = \frac{5.301^\circ}{55} = 0.096\frac{\circ}{\text{мм}} = 5.782\frac{'}{\text{мм}}$$

[1] У участника могут быть сняты размеры в другом масштабе. Настоятельно рекомендуем проверяющим проверить точность снятия размеров участниками по реальным материалам, напечатанным в пункте проведения олимпиады.


T
b
Y
Небесный экватор
a
(3) 110 Vir
ℓ_{13}
H
109 Vir
(1)
ℓ_{23}
ℓ_{12}
11 Lib (2)
L_2
A
O
X
Математический горизонт

$$\mu_{13} = \frac{\theta_{13}}{\ell_{13}} = \frac{4.167^\circ}{43} = 0.097\frac{\circ}{\text{мм}} = 5.814\frac{'}{\text{мм}}$$

$$\mu = \frac{\mu_{12} + \mu_{23} + \mu_{13}}{3} = \frac{5.686 + 5.782 + 5.814}{3} = 5.761\frac{'}{\text{мм}} = 0.096\frac{\circ}{\text{мм}}$$

Выполним оценку **абсолютной** $\Delta\mu$ и **относительной** ε_μ погрешностей определения величины μ. Цена деления стандартной линейки $\ell_0 = 1$ мм, тогда абсолютная $\Delta\mu_{ij}$ и относительная $\varepsilon_{i,j}$ погрешности масштаба μ_{ij} (здесь индексы i и j пробегают значения $1, 2, 3$) будут равны

$$\mu_{ij} \pm \Delta\mu_{ij} = \frac{a_{ij}}{\ell_{ij} \pm \ell_0} = \frac{a_{ij}}{\ell_{ij}(1 \pm \ell_0/\ell_{ij})} \approx \frac{a_{ij}}{\ell_{ij}}\left(1 \mp \frac{\ell_0}{\ell_{ij}}\right) \approx \mu_{ij}\left(1 \mp \frac{\ell_0}{\ell_{ij}}\right)$$

Абсолютная погрешность $\Delta\mu$ величины μ

$$\Delta\mu_{ij} = \mu_{ij}\frac{\ell_0}{\ell_{ij}},$$

Относительная погрешность ε_μ величины μ

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{\Delta\mu_{ij}}{\mu_{ij}} \cdot 100\% = \frac{\ell_0}{\ell_{ij}} \cdot 100\%.$$

При записи последнего результата мы учли, что $(\ell_0/\ell_{ij}) \ll 1$. Тогда относительная ε_μ и абсолютная $\Delta\mu$ погрешности можно записать так:

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{3}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}) = \frac{\ell_0}{3}\left(\frac{1}{\ell_{12}} + \frac{1}{\ell_{13}} + \frac{1}{\ell_{23}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{46} + \frac{1}{55} + \frac{1}{43}\right) = 0.021 \approx 2.1\%$$

$$\Delta\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{100\%} \cdot \mu = 0.121'/\text{мм}.$$

Окончательно масштаб кадра будет равен:

$$\mu \pm \Delta\mu = 5.761 \pm 0.121\frac{'}{\text{мм}} = 0.096 \pm 0.002\frac{\circ}{\text{мм}}$$

Далее при помощи линейки измерим линейные размеры фотографии: $a \times b = 220 \times 148$ мм. Соответствующие угловые размеры участка небосвода, запечатленного на фотографии, равны

$$b_x = 148 \pm 1 \text{ мм} \to b = \mu x = 5.761 \cdot 148 = 852.63' = 14.211^\circ$$

$$a_y = 220 \pm 1 \text{ мм} \to a = \mu x = 5.761 \cdot 220 = 1267.42' = 21.124^\circ$$

Следовательно, угловой размер кадра составляет $21.12^\circ \times 14.21^\circ$.

Представим **общий алгоритм оценки погрешностей** измеряемой угловой величины на примере абстрактной величины X. Погрешность складывается из погрешности измерения самой величины линейкой ℓ_0 и погрешности определения масштаба, при помощи которого мы переводим измеряемые линейкой величины в угловые величины:

$$X \pm \Delta X = (L \pm \ell_0) \cdot (\mu \pm \Delta\mu) \approx (L \cdot \mu)\left(1 + \frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = X\left(1 + \frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right)$$

Абсолютная погрешность величины X равна

$$\Delta X = X\left(\frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right),$$

а относительная погрешность величины X равна

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\% = \frac{\ell_0}{L} \cdot 100\% + \frac{\Delta\mu}{\mu} \cdot 100\% = \varepsilon_L + \varepsilon_\mu$$

$$\Delta X = X \cdot \frac{\varepsilon_X}{100\%}$$

Таким образом, относительная погрешность измеряемой величины X равна сумме относительных погрешностей величин, через которые она непосредственно определяется, и подлежащих определению по фотографии.

Абсолютная погрешность искомых величин a и b определяется через относительную по выведенной выше формуле:

$$\Delta a = a\left(\frac{\ell_0}{L_a} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = 21.12^\circ\left(\frac{\ell_0}{220} + \frac{0.121}{5.761}\right) = 0.540^\circ \approx 0.54^\circ.$$

$$\Delta b = b\left(\frac{\ell_0}{L_b} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = 14.21^\circ\left(\frac{\ell_0}{148} + \frac{0.121}{5.761}\right) = 0.394^\circ \approx 0.39^\circ.$$

Определим численные результаты для искомых угловых размеров и их погрешностей:

$$a \pm \Delta a = 21.12^\circ \pm 0.54^\circ,$$

$$b \pm \Delta b = 14.21^\circ \pm 0.39^\circ.$$

Определим **широту места наблюдения**.

Первый, более грубый способ ее определения – прибегнуть к помощи транспортира. Острый угол между математическим горизонтом и небесным экватором равен $\chi = 60^\circ \pm 1^\circ$ (здесь учтено, что цена деления стандартного транспортира равна 1°). С другой стороны, $\chi = 90^\circ - |\varphi|$, где φ – географическая широта места фотосъемки. Очевидно, такая взаимная ориентация экватора и горизонта в окрестности точки запада характерна лишь для северного полушария.

Отсюда $\varphi = 30^\circ \pm 1^\circ$.

Второй способ состоит в нахождении угла прямоугольного треугольника, образованного углом снимка, точкой запада, гипотенузой небесного экватора и точкой Y пересечения вертикальной стороны снимка и небесного экватора. Длина катета OY равна $L_{OY} = 203$ мм, а длина гипотенузы XY равна $L_{XY} = 232$ мм

Определим угол при вершине Y. Так как треугольник XOY прямоугольный, а угол при вершине X равен $90° - \varphi$, угол при вершине Y будет равен φ.

$$\cos\varphi = \frac{203}{232} \to \varphi = \arccos\left(\frac{203}{232}\right) = 28.955° \text{ с.ш.}$$

$$\ell_{OY} = \mu \cdot L_{OY} = 5.761 \cdot 203 = 1169.483' \approx 19.491°,$$

$$\ell_{XY} = \mu \cdot L_{XY} = 5.761 \cdot 232 = 1336.552' \approx 22.276°.$$

Ошибки измерения сторон составят:

$$\Delta\ell_{OY} = \ell_{OY}\left(\frac{\ell_0}{L_{OY}} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = 19.491\left(\frac{1}{203} + \frac{0.121}{5.761}\right) = 0.505°,$$

$$\Delta\ell_{XY} = \ell_{XY}\left(\frac{\ell_0}{L_{XY}} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = 22.276\left(\frac{1}{232} + \frac{0.121}{5.761}\right) = 0.564°.$$

Так как наши измерения сторон независимы друг от друга, то суммарную погрешность определения широты можно найти следующим образом:

$$\Delta\varphi = \sqrt{\Delta\ell_{OY}^2 + \Delta\ell_{XY}^2} = \sqrt{0.505^2 + 0.564^2} \approx 0.757°.$$

Широта места наблюдения:

$$\varphi = 28.955° \pm 0.757° \text{ с.ш.} \to \varphi = 28°57'18'' \pm 45'25'' \text{ с.ш.}$$

Определим **долготу места наблюдения**. Для определения географической долготы λ места съемки воспользуемся формулой связи между долготами и звездным временем – разность долгот мест наблюдения равна разности звездных времен в этих местах. Будем искать долготу, опираясь на гринвический меридиан $\lambda_0 = 0°$:

$$\lambda - \lambda_0 = s - s_{GR}$$

Местное среднее солнечное время T_m связано со звездным временем:

$$(T_m - T_0) = k'(s - s_0), \;\text{ где }\; k' = \frac{86164}{86400} = 0.997269,$$

здесь s – местное звездное время на момент съемки, s_0 – местное звездное время на начало средних солнечных суток. Определим параметры s и s_0. Звездное время s равно прямому восхождению светил, находящихся в данный момент в верхней кульминации (над точкой юга). Из определения звездного времени следует, что в момент верхней кульминации оно равно прямому восхождению кульминирующего светила. И если светило находится на небесном экваторе,

$$s = 6^h + \alpha_W.$$

Здесь α_W – прямое восхождение точки небосвода, которая в момент съемки совпала с точкой запада. Последнюю величину определим как

$$\alpha_W = \alpha_3 - L_2 \cdot \mu = 15^h04^m08^s - \frac{5.761' \cdot 129}{60 \cdot 15} = 15^h04^m08^s - 49^m33^s = 14^h14^m35^s.$$

Здесь $L_2 = 129$ мм – расстояние между звездой 3 и точкой запада (W), отсчитываемое вдоль экватора. Тогда

$$s = 20^h14^m35^s$$

Известно, что в момент осеннего равноденствия звездное время совпадает со средним солнечным временем. Существует простое правило: Солнце кульминирует в полдень по среднему солнечному времени, и его прямое восхождение тоже равно 12^h. Но каждые следующие звездные сутки наступают раньше предыдущих. В каждых средних солнечных сутках содержится $86400/k' = 86636.7$ звездных секунд, что больше одних звездных суток на 236.7 звездных секунд. Тогда от момента осеннего равноденствия до начала местной полуночи 14 октября на меридиане Гринвича прошло

$$\Delta\tau = 21^d11^h16^m = 21.4695 \text{ сут}$$

За это время начало звездных суток сместится относительно начала средних солнечных суток на величину:

$$s_0 = 236.7 \cdot 21.4695 = 1.4116^h = 1^h24^m42^s.$$

Звездное время на гринвичском меридиане в момент 20^h00^m (момент фотографии) будет равно

$$s_{GR} = s_0 + \frac{20^h00}{k'} = 1^h24^m42^s + 20^h3^m17^s = 21^h27^m59^s$$

Тогда разность долгот между точкой наблюдения и гринвическим меридианом составляет

$$\lambda - \lambda_0 = s - s_{GR} = 20^h14^m35^s - 21^h27^m59^s = -1^h13^m24^s,$$

$$\lambda = -01^h13^m24^s = 18°21' \text{ з.д.}$$

Определим погрешность измерения долготы. Погрешность определения долготы возникает из-за ошибки определения прямого восхождения точки Запада. Говоря еще точнее, это ошибка определения величины $\alpha_a - \alpha_W = \mu \cdot L_2$, поскольку далее к ней добавляются только известные константы.

$$\Delta(\mu \cdot L_2) = \mu \cdot L_2 \left(\frac{\ell_0}{L_2} + \frac{\Delta\mu}{\mu} \right) = \frac{5.761' \cdot 129}{60} \left(\frac{1}{129} + \frac{0.121}{5.761} \right) = 0.3562^\circ \approx 0.36^\circ.$$

Следовательно долгота равна

$$\lambda = 18^\circ 21' \pm 0.36^\circ = 18^\circ 21' \pm 21' \text{ з.д.}$$

Округление полученных результатов: В этом месте решения наступил момент произвести округления полученных результатов. Делать это раньше не стоило, так как в этом случае к промежуточным величинам добавились бы еще ошибки округления. Выбор точности для округления результатов дает величина абсолютной погрешности. По общим правилам, в значении погрешности разумно оставлять одну значащую цифру. Две значащие цифры в погрешности можно оставлять в случае, если произведены особо точные измерения, или в старшем разряде погрешности цифра 1.

Итоговые ответы:

A. Угловые размеры участка неба запечатленного на фотографии $(21.1^\circ \pm 0.6^\circ) \times (14.2^\circ \pm 0.4^\circ)$

B. Фотосъемка была выполнена вечером спустя небольшое время после захода Солнца.

C. Географические координаты места фотосъемки кометы:

$$\varphi = 29^\circ\ 00' \pm 50' \text{ с.ш.}$$

$$\lambda = 18^\circ\ 20' \pm 20' \text{ з.д.}$$

Критерии оценивания. **20**

Комментарии к системе оценивания. Каждая арифметическая ошибка, не приводящая к явно нелепому ответу, снижает оценку за соответствующий пункт на 1 балл. Максимальная оценка последующих пунктов при этом не снижается, если это не указано отдельно.

K1. Масштаб фотографии **4**

Измерены линейные расстояния между 2 или 3 звездами 1

Определены угловые расстояния между звездами 1

Определена величина масштаба в диапазоне 5.8 ± 0.2 ’/мм 1

Определена погрешность масштаба 1

Если масштаб определен по одному угловому расстоянию между звездами, за K1 ставится не более $2 = 0 + 0 + 1 + 1$ баллов, при условии попадания ответов в заданный интервал и расчета погрешности. На дальнейшее решение задачи и его оценивание это не влияет.

Вероятная ошибка: участник не перевел координаты прямого восхождения из временных единиц в угловые. В этом случае K1 не оценивается, но остальные пункты оцениваются, исходя из значения масштаба, полученного участником. Максимальная оценка за K3-5 на один балл меньше, чем при верном нахождении масштаба.

K2. Угловой размер фотографии с погрешностями измерений **4**

Определен размер по большой оси $a \in [20.5°; 22°]$ 1

Определен размер по малой оси $b \in [13.5°; 15°]$ 1

Определена погрешность размера по большой оси a 1

Определена погрешность размера по малой оси b 1

Если погрешности измерений a и b найдены упрощенным методом только из погрешности линейки без учета погрешности определения масштаба, то из двух баллов за погрешности выставляется только 1.

K3. Время съемки – вечер, спустя небольшое время после захода Солнца **2**

Найдено и обосновано качественно/количественно – вечер после захода Солнца 2

Важными моментами в обосновании являются указания на нахождение Солнца в южном полушарии и ссылка на положение звезд с известными координатами.

Если корректное обоснование отсутствует, но ответ верен, то выставляется 1 балл. Необоснованными считаются аргументы: «очевидно», «из фотографии следует», «легко увидеть».

K4. Географические координаты. Широта **3**

Получено значение широты в диапазоне $[+28°; 31°]$ с.ш. 2

Если использовался только транспортир, за предыдущий пункт выставляется 1 балл

Определена погрешность нахождения географической широты 1

K5. Географические координаты. Долгота **7**

Ниже описаны действия, которые должны выполнить участники.

Определено прямое восхождение точки W 1

Определено звездное время на момент фотографии или начало суток 14 октября 2

Учтена разница в длительности звездных и солнечных суток 1

Получено численное значение долготы в диапазоне $[-20°; -16°]$ 2

Если в определении долготы не учитывается смещение начала звездных суток, выставляется только 1

Определена ошибка нахождения географической долготы 1

Если ошибки измерений географической широты и долготы найдены только из погрешности линейки или транспортира, без учета погрешности определения масштаба, то из двух баллов за погрешности широты и долготы выставляется только 1