Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2023 год
Первый (теоретический) тур

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9.1. СВИДАНИЕ С ВЕНЕРОЙ *(О.С. Угольников)*

Условие. Ближайшее нижнее соединение Венеры с Солнцем по эклиптической долготе произойдет 13 августа 2023 года в 11ч10м по Всемирному времени. Известно, что координаты Солнца в этот момент составят α = 09ч31.5м, δ = +14°40′, а Венера пройдет в 7°40′ южнее эклиптики. Определите координаты точки на поверхности Земли, из которой Венера будет лучше всего видна в этот момент. Считать, что Венера видна, если центр диска Солнца расположен не выше горизонта, а критерием качества видимости при этих условиях является высота Венеры над горизонтом. Атмосферной рефракцией и уравнением времени пренебречь.

Решение. По условию задачи, наилучшие условия для наблюдения Венеры наступают, если центр Солнца располагается не выше горизонта, а Венера при этом находится на наибольшей высоте. Угловое расстояние между Солнцем и Венерой в этот момент нам известно (7°40′), и оно невелико. Поэтому для наилучших условий Солнце должно располагаться на горизонте, а Венера – в точности над ним.

В момент соединения эклиптические долготы Солнца и Венеры совпадают. Линия «Солнце – Венера» перпендикулярна эклиптике, а точка пересечения с ней – Солнце – находится на горизонте. Коль скоро эта же линия перпендикулярна горизонту, мы делаем вывод, что горизонт и эклиптика в данный момент совпадают. Это может иметь место только на полярном круге. Поскольку Венера находится южнее эклиптики, ситуация имеет место на южном полярном круге, широта равна –66.6°. Мы нашли одну из координат точки Земли.

В зените в этот момент находится южный полюс эклиптики, прямое восхождение которого равно 6ч. Такое же значение имеет звездное время в момент наблюдения. Пренебрегая уравнением времени, определим звездное время в солнечную полночь 13 августа. Эта дата предшествует осеннему равноденствию на 41 день, и Солнцу в своем видимом движении осталось преодолеть 40° или 2ч40м до точки осеннего равноденствия, когда звездное время в полночь будет равно 0ч. Так как по условию задачи мы пренебрегаем уравнением времени, мы можем считать движение Солнца по прямому восхождению равномерным. Следовательно, сейчас звездное время в полночь составляет 21ч20м. Если же текущее звездное время равно 6ч, мы можем определить солнечное время:

$$T = 6\text{ч} - 21\text{ч}20\text{м}\ (+24\text{ч}) = 8\text{ч}40\text{м}.$$

При этом Всемирное время UT равно 11ч10м. Таким образом, долгота места есть

$$\lambda = T - \mathrm{UT} = -2\text{ч}30\text{м} = -37.5°.$$

Искомая точка находится в южной зоне Атлантического океана, координаты λ = –37.5°, φ = –66.6°. В этот момент Солнце там восходит над горизонтом, Венера взошла до него и находится над ним на небе.

Система оценивания.

<u>1 этап – 2 балла.</u> Вывод о том, что в искомой точке эклиптика должна совпадать с горизонтом. Может быть сделан словами или графически. Основополагающим должен быть факт, что Венера располагается в точности над Солнцем, а Солнце – на горизонте. Данное указание является необходимым, но не достаточным для зачета данного этапа. К примеру, если из него делается вывод, что Венера располагается в точности в направлении к южному полюсу мира, и ситуация наблюдается в полярный полдень на широте –75°40′, то этап не засчитывается полностью (0 баллов).

Если вывод о совпадении эклиптики и горизонта делается без обоснования – этап засчитывается 1 баллом. Если он не делается вовсе, но присутствует в неявном виде в дальнейшем решении – этап не засчитывается. В обоих случаях последующие этапы оцениваются в полной мере.

<u>2 этап – 2 балла.</u> Определение широты места. Засчитывается только в случае правильного ответа (формулировка «Южный полярный круг» или широты от –66.5° до –67°). Если участник путает Южный полярный круг с северным, этап не засчитывается полностью, при этом ему может быть засчитан первый этап в случае правильного выполнения (горизонт совпадает с эклиптикой).

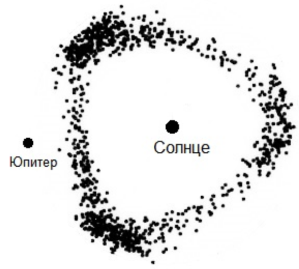
<u>3 этап – 6 баллов.</u> Определение долготы места, точность 5°. Этап может выполняться разными способами, при использовании подхода, описанного выше (четыре подэтапа: текущее звездное время – звездное время в солнечную полночь (или полдень) – солнечное время в пункте наблюдения) – долгота места оцениваются последовательно в 2-2-1-1 балл. При использовании иной схемы расчета можно провести аналогию с представленной выше и также выстроить систему оценивания. В случае ошибки на том или ином подэтапе он не засчитывается полностью вне зависимости от причины. Если при этом ошибка имела фактический характер (использование неверной формулы связи звездного и солнечного времени, солнечного времени и долготы, в том числе неверные знаки) – дополнительно вычитается 1 балл из общей оценки за этап, если она превышает 0.

Комментарий: при вычислении текущего прямого восхождения Солнца участники могут учесть наклон его видимого пути по эклиптике к экватору. В этом случае они получат 21ч30м вместо 21ч20м, что в конечном итоге уменьшит долготу на 2.5°, она составит –40°. В данном случае, это делать не обязательно, так как это один из факторов уравнения времени, которым по условию задачи можно пренебречь. Но это не может быть основанием для снижения оценки, так как в реальности получается более точный ответ.

Типичная ошибка при выполнении этапа: подстановка неверного значения звездного времени в полночь (в том числе, в результате неверного выполнения предыдущих этапов), указывается время 0, 12 или 18 часов вместо 6 часов. Если остальные расчеты верные, и ответ отличается от верного на 6 или 12 часов – не засчитывается первый подэтап, а также вычитается 1 балл, так как ошибка является фактической. Оценка за этап не превосходит 3 баллов.

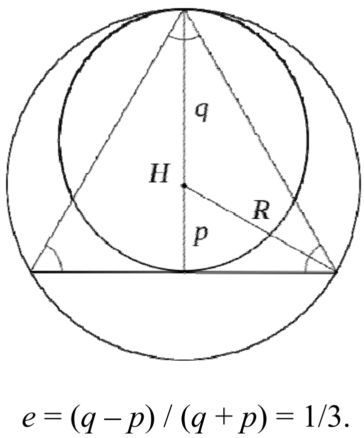
9.2. СЕМЕЙСТВО ХИЛЬДЫ *(М.И. Волобуева)*

Условие. Около орбиты Юпитера находится группа астероидов, образующих так называемое семейство Хильды. Эти астероиды примечательны тем, что в любой момент времени образуют правильный треугольник, вершины которого лежат вблизи орбиты Юпитера (см. рисунок). Этот треугольник поворачивается в пространстве синхронно с орбитальным движением Юпитера так, что Юпитер всегда равноудалён от двух ближайших к нему вершин. Определите большую полуось (с точностью лучше 1%) и эксцентриситет орбиты астероидов из семейства Хильды. Орбиту Юпитера считайте круговой, «толщиной линий» треугольника пренебрегите.



Решение. По рисунку может показаться, что астероиды двигаются вдоль сторон треугольника. Разумеется, этого не может быть, каждый астероид семейства Хильды движется по эллиптической орбите. Вращающийся треугольник – всего лишь иллюзия, вызванная синхронизацией орбитальных периодов Юпитера и астероидов. Такое явление называется орбитальным резонансом.

Вначале мы определим эксцентриситет орбиты астероидов. Так как «толщиной» треугольника мы по условию задания пренебрегаем, то наибольшее расстояние астероида от Солнца есть отрезок между центром и вершиной треугольника, а наименьшее – между центром и стороной. Как известно, центр равностороннего треугольника делит его медиану в соотношении 2:1. Отсюда:



$$e = (q - p) / (q + p) = 1/3.$$

Из условия следует, что расстояние между астероидами и Солнцем в афелии их орбит близко к радиусу орбиты Юпитера, то есть $q_0 = 5.203$ а.е. Мы можем вначале предположить вначале, что точки афелия находятся прямо на орбите Юпитера. Тогда из свойств равностороннего треугольника находим их перигелийное расстояние в этом приближении: $p_0 = q_0/2 = 2.602$ а.е., большая полуось есть $a_0 = 3q_0/4 = 3.902$ а.е. Однако, это не является точным решением. Действительно, в этом случае орбитальный период астероидов (в годах) составил бы

$$T_0 = a_0^{3/2} = \left(\frac{3q_0}{4}\right)^{3/2} = q_0^{3/2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = T_J\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx T_J\cdot 0.65.$$

Отношение периодов обращения астероидов (T_0) и Юпитера (T_J) оказывается иррациональным числом. Мы же наблюдаем резонанс, при котором положения афелиев астероидов концентрируются к трем равноудаленным положениям вблизи орбиты Юпитера. Это может быть, если период обращения астероидов есть $n/3$ периодов обращения Юпитера, где n – целое число. Зная примерный период астероидов T_0, мы делаем вывод, что $n=2$. Тогда мы находим точную большую полуось орбит астероидов:

$$a = \left(\frac{2T_J}{3}\right)^{2/3} = T_J^{2/3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = q_0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = 3.97 \textit{ а.е.}$$

Можно провести рассуждения и в обратном порядке: из условия резонанса мы знаем, что период обращения астероидов T есть $T_J \cdot n/3$, отсюда мы находим большую полуось их орбиты:

$$a = \left(\frac{nT_J}{3}\right)^{2/3} = T_J^{2/3}\cdot\left(\frac{n}{3}\right)^{2/3} = q_0\cdot\left(\frac{n}{3}\right)^{2/3}.$$

Зная эксцентриситет, мы находим афелийное расстояние астероидов:

$$q = a(1+e) = \frac{4a}{3} = \frac{4q_0}{3^{5/3}}n^{2/3} \approx 0.641 q_0 n^{2/3}.$$

При этом мы знаем, что величина q должна быть близка к q_0, что приводит нас к $n=2$ и $a = 3.97$ а.е..

Система оценивания.

Этап 1 – 4 балла. Определение эксцентриситета орбиты. Так как по условию задачи треугольник считается правильным, а его толщина не учитывается, то эксцентриситет должен оказаться равным 1/3.

Этап 2 – 4 балла. Определение периода обращения астероидов, которое должно быть равно в точности 2/3 от орбитального периода Юпитера.

Этап 3 – 2 балла. Определение большой полуоси орбиты астероидов, точность 1%.

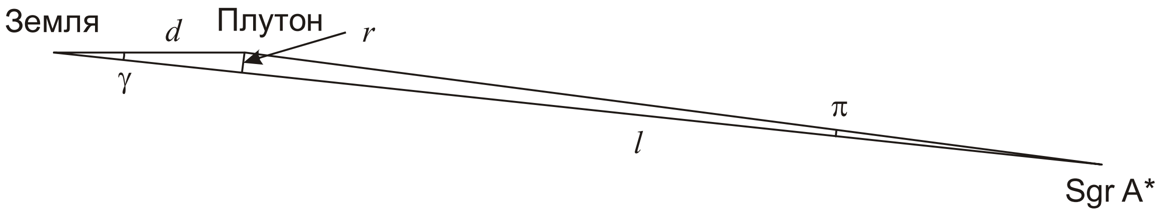
Возможное неточное решение: предположение, что афелий орбит астероидов лежит точно на орбите Юпитера, что дает значение большой полуоси 3.90 а.е., что выходит за рамки требуемой точности. В этом случае за 2 и 3 этапы вместе выставляется не более 2 баллов, суммарная оценка – не более 6 баллов.

9.3. ТРИАНГУЛЯЦИЯ БУДУЩЕГО *(О.С. Угольников)*

Условие. В ходе астрометрической миссии будущего (через 200 с небольшим лет) координаты центра сверхмассивной черной дыры (СМЧД) в центре нашей Галактики одновременно измеряются инфракрасными телескопами с околоземной орбиты и с поверхности Плутона (его координаты в небе Земли в этот момент α = 18ч, δ = –17°, гелиоцентрическое расстояние 32 а.е.). Обоими телескопами было сделано по одному измерению с точностью до 1 наносекунды дуги (10^{-9}″). С какой точностью можно определить расстояние до центра СМЧД в центре Галактики на основе этих измерений?

Решение. Гелиоцентрическое расстояние Плутона существенно больше гелиоцентрического расстояния Земли. Мы будем из естественных соображений предполагать, что измерения производились вблизи противостояния Плутона и находящегося на небе неподалеку центра галактики, и тогда расстояние между точками измерений составляет 31 а.е. При этом, ответ на задачу существенно не изменится, если мы будем считать его равным средней величине (32 а.е.).

Фактор, который нужно принять во внимание – относительное расположение Плутона и центра Галактики в небе Земли во время эксперимента. Они находятся неподалеку друг от друга. Если знать точные координаты источника Стрелец А, связанного с СМЧД (17ч45м, –29°), то угловое расстояние между ними γ получается равным 13°, оно практически не изменяется, если мы учтем прецессионное смещение за 200 лет (12°).



Угол, под которым из центра Галактики будет видна линия «Земля – Плутон», равен

$$\pi = \frac{d \sin\gamma}{l}.$$

Этот параллактический угол есть разница координат СМЧД, измеренных с Земли и Плутона. Это соотношение есть основа для определения расстояния до источника Sgr A*. Пусть теперь в результате измерений угол π был измерен с ошибкой $\Delta\pi$. Тогда итоговое расстояние будет измерено с ошибкой Δl:

$$l + \Delta l = \frac{d \sin\gamma}{\pi + \Delta\pi} = \frac{d \sin\gamma}{\pi(1 + \Delta\pi / \pi)} \approx \frac{d \sin\gamma}{\pi}(1 - \Delta\pi / \pi).$$

Отсюда мы получаем выражение для модуля погрешности измерения расстояния:

$$|\Delta l| = \frac{d \sin\gamma |\Delta\pi|}{\pi^2} = \frac{l^2 |\Delta\pi|}{d \sin\gamma}.$$

По условию задачи, обе обсерватории имеют ошибку измерений координат 10^{-9}″ или $5 \cdot 10^{-15}$ радиан. Поэтому результирующую ошибку правильней считать большей в √2 раза (хотя для оценки можно считать ее такой же или в 2 раза большей). Расстояние l есть 8.5 кпк или $1.8 \cdot 10^9$ а.е. В итоге, мы получаем оценку погрешности расстояния $\Delta l \sim 2000$ а.е.

Система оценивания.

<u>Этап 1 – 4 балла</u>. Учет фактора расположения линии «Земля – Плутон» во время измерений. Координаты центра Галактики в условии задачи в явном виде не заданы, поэтому от участников не предполагается высокой точности, необходим прежде всего сам учет. Участники могут предположить, что центр Галактики совпадает по положению с точкой зимнего солнцестояния, что даст угол γ 6.5° – вдвое меньше истинного и в итоге вдвое большую оценку погрешности определения расстояния. Подобное отклонение допустимо и оценивается полностью. При ошибке угла γ более 2 раз оценка снижается на 1 балл, более 3 раз – на 2 балла, более 4 раз – на 3 балла.

Если участник опускает данный фактор вообще – этап не засчитывается полностью. Остальные этапы при условии правильных вычислений (погрешность расстояния около 500 а.е.) оцениваются в полной мере.

<u>Этап 2 – 2 балла.</u> Соотношение между расстоянием до источника, параллактическим углом и расстоянием между Землей и Плутоном.

<u>Этап 3 – 2 балла</u>. Связь между погрешностью определения параллактического угла и погрешностью расстояния. Может выводиться с помощью формул для малых параметров, как сделано выше, или геометрически. Погрешность определения параллактического угла может быть принята равной 1, √2 и 2 погрешностям одного измерения с одной обсерватории, все эти варианты считаются верными.

<u>Этап 4 – 2 балла</u>. Значение погрешности определения расстояния. Расстояние до центра Галактики может быть принято равным от 8 до 9 кпк. Точность (без учета ошибок, описанных выше) – 10%. При ошибках до 20% оценка снижается на 1 балл.

9.4. УЛЕТАЮЩАЯ ЗВЕЗДА *(Ю.П. Филиппов)*

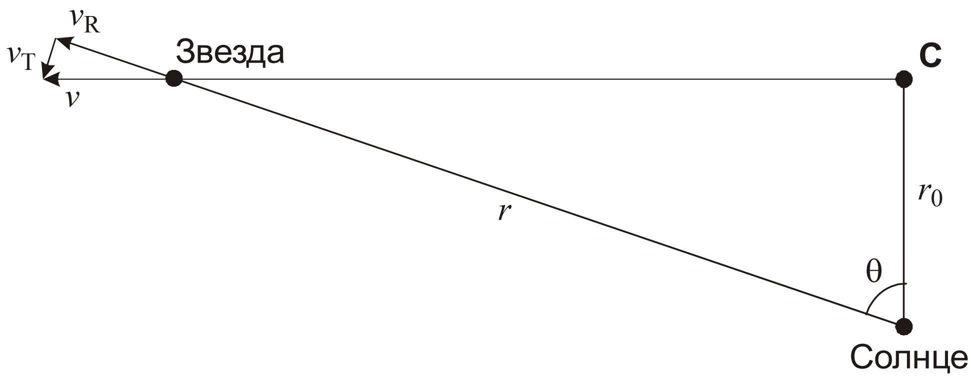
Условие. В 2014 году была открыта звезда WISE 0720-0846. Эта звезда интересна тем, что в прошлом она достаточно близко подлетела к Солнечной системе. Определите:

1. Минимальное гелиоцентрическое расстояние, на которое сближалась звезда с Солнцем.
2. Сколько лет назад это произошло?
3. Какова была при этом ее звездная величина?
4. Чему были равны ее полное собственное движение и радиальная скорость в этот момент?
5. Если полагать, что данная звезда породила возмущение в кометном облаке Оорта, то через какой минимальный промежуток времени следует ожидать приток комет в окрестностях Земли?

Современные характеристики звезды:

Видимая звездная величина	m	18.3
Лучевая скорость	v_R	+82.4 км/с
Параллакс	π	0.147″
Собственное движение вдоль экватора	μ_α	–0.0403″/год
Собственное движение к полюсу	μ_δ	+0.1148″/год

Решение. Рассмотрим рисунок, соответствующий условию задачи. Точка **C** – точка максимального сближения звезды с Солнцем. Вектор пространственной скорости звезды можно представить в виде:



$$v = \sqrt{v_R^2 + v_T^2},$$

где v_R – лучевая и v_T – трансверсальная скорость звезды. Определим v_T с использованием известной формулы:

$$v_T(км/с) = 4.74 \cdot \frac{\mu(''/год)}{\pi('')} = 4.74 \cdot \frac{\sqrt{\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2}(''/год)}{\pi('')} = 3.92\ км/с.$$

В итоге, мы получаем полную пространственную скорость звезды относительно Солнца: v = 82.5 км/с, она практически не отличается от лучевой.

Пусть r_0 – минимальное расстояние между звездой и Солнцем, θ – угол между направлениями на ближайшее и текущее положение звезды. Тогда:

$$\cos\theta = \frac{r_0}{r} = \frac{v_T}{v} = 0.0475.$$

Отсюда мы получаем выражение для минимального расстояния r_0:

$$r_0 = r\frac{v_T}{v} = \frac{1}{\pi('')}\frac{v_T}{v} = 0.323\ пк,$$

а также звездной величины в этот момент:

$$m_0 = m - 5\,lg\frac{r_0}{r} = m - 5\,lg\frac{v_T}{v} = 11.7.$$

Лучевая скорость звезды тогда была равна нулю, а собственное движение

$$\mu_0 = \frac{v(км/c)}{4.74\cdot r_0(пк)} = \frac{\mu}{cos^2\theta} = 53.9''/год,$$

что в 5 раз превышает современное собственное движение звезды Барнарда. Определим время, прошедшее с этого момента:

$$t = \frac{r\,sin\theta}{v} = \frac{r\cdot v_R}{v^2} = 2.54\cdot 10^{12}\ c = 8.05\cdot 10^4\ лет.$$

Предположим, что в момент наибольшего сближения с Солнцем звезда вызвала возмущение в облаке Оорта, в результате которого значительное число кометных ядер направились к Солнцу. Их движение можно представить себе как орбитальное с близким перигелием и афелием на расстоянии r_0 (0.323 пк или 66600 а.е.). Тогда большая полуось их орбит составит $r_0/2$, а время достижения перигелия – половина орбитального периода:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{2}\right)^{3/2} = 3.04\cdot 10^6\ лет.$$

Можно учесть, что уже прошло время t с этого момента, хотя оно существенно меньше, и его учет необязателен. Тогда время, оставшееся до прилета комет к Солнцу, составит

$$T - t = 2.96\cdot 10^6 \text{ лет.}$$

Система оценивания

Этап 1 – 1 балл. Выражение или численное значение для трансверсальной скорости звезды в текущий момент. Выставляется только при правильном выражении для полного собственного движения (теорема Пифагора без фактора cos δ в собственном движении по α). При неверных формулах или численной ошибке более 10% этот балл не выставляется.

Этап 2 – 2 балла. Определение минимального расстояния между Солнцем и звездой. Может быть вычислено через полную скорость звезды или через косинус угла θ. Требуемая точность – 10% без учета ошибок на других этапах (при ошибке до 20% оценка уменьшается на 1 балл).

Этап 3 – 1 балл. Определение звездной величины звезды в этот момент, точность 0.1^m без учета ошибок на других этапах.

Этап 4 – 2 балла. Определение времени, прошедшего с момента сближения звезды с Солнцем, точность 10% без учета ошибок на других этапах, при ошибке до 20% оценка снижается на 1 балл.

Этап 5 – 2 балла. Определение лучевой скорости (нулевая, 1 балл) и собственного движения звезды в тот момент времени (1 балл, точность 10%).

Этап 6 – 2 балла. Нахождение времени до вероятного прилета кометных ядер, точность 10%. Если участник олимпиады записывает в качестве этого времени полупериод узкой эллиптической орбиты и не делает никаких комментариев по поводу уже прошедшего с момента пролета времени – за этап выставляется 1 балл. Если при этом указывается, что время, прошедшее с пролета звезды и возмущения облака Оорта значительно меньше или это время вычитается – выставляются 2 балла при условии верного ответа.

9.5. ГОРЯЧЕЕ БУДУЩЕЕ *(А.Н. Акиньщиков)*

Условие. Согласно модели, используемой в статье K.P. Schröder, R.C. Smith (2008), через 12.17 млрд лет после своего образования Солнце достигнет наибольшего размера в течение своей эволюции. Радиус Солнца будет в 256 раз больше нынешнего, светимость станет в 2730 раз больше нынешней, а масса уменьшится на 33.2%. Считайте, что потеря массы Солнцем происходит медленно в течение всей стадии красного гиганта, а физические свойства других тел Солнечной системы при росте температуры не меняются.

Определите для момента времени, описанного выше:
1. Какие планеты Солнечной системы будут поглощены Солнцем?
2. Найдите среднюю температуру поверхности самой горячей планеты, которая не будет поглощена Солнцем.
3. Какие крупные тела Солнечной системы окажутся в зоне жизни (средняя температура от 250 до 300K без учета парникового эффекта в атмосфере)?

Решение. Если масса центрального тела меняется медленно, то круговые орбиты остаются таковыми. Пусть начальная масса Солнца равна M_0, масса в стадии красного гиганта – M. Аналогично определим старые и новые радиусы орбиты R_0 и R, периоды обращения t_0 и t. Запишем выражение обобщенного III закона Кеплера:

$$\frac{a_0^3}{t_0^2 M_0} = \frac{a^3}{t^2 M}.$$

Помимо этого, в системе не появляется нерадиальных сил, и поэтому действует закон сохранения момента импульса (v_0 и v – орбитальные скорости):

$$a_0 v_0 = av; \quad \frac{a_0^2}{t_0} = \frac{a^2}{t}.$$

Возводя второе уравнение в квадрат и деля его на первое уравнение, получаем $a_0 M_0 = aM$. Таким образом, если новая масса Солнца составляет (1 – 0.332) M_0 = 0.668 M_0, то радиусы орбит всех тел (кроме тех, что будут поглощены Солнцем) увеличатся в 1.497 раз. Новый радиус Солнца составит 256 его нынешних радиусов, что есть 179.2 млн км или 1.20 а.е. Солнце поглотит тела, находящиеся на меньших расстояниях, то есть те, которые сейчас удалены от него менее, чем на 1.20/1.497 = 0.80 а.е. Это Меркурий и Венера.

Чтобы ответить на другие вопросы, запишем уравнение теплового баланса для тела на расстоянии a от Солнца:

$$\frac{J\cdot(1-A)\cdot \pi r^2}{4\pi a^2} = 4\pi\sigma r^2 T^4; \quad T^4 = \frac{J\cdot(1-A)}{16\pi\sigma a^2} = \frac{J\cdot(1-A)}{16\pi\sigma a_0^2}\left(\frac{M}{M_0}\right)^2.$$

Здесь J – светимость Солнца на стадии красного гиганта ($1.06\cdot 10^{30}$ Вт), A – альбедо тела. Так как Меркурий и Венера окажутся поглощенными Солнцем, самой горячей планетой окажется Земля. Марс хоть и имеет меньшее альбедо, но будет холодней. Она будет располагаться на расстоянии a = 1.497 а.е. от Солнца, и ее средняя температура составит

1470 K. Конечно, предположение о сохранении физических свойств Земли выглядит неразумным, тем не менее – это вполне адекватная оценка температуры Земли в этих условиях. Потеря атмосферы и воды уменьшит альбедо нашей планеты и усилит ее нагрев, но исчезнет и парниковый эффект.

Рассмотрим теперь вопрос о «зоне жизни». Если мы знаем среднюю температуру тела, то соответствующее расстояние от Солнца в виде красного гиганта есть

$$a = \frac{1}{4T^2}\sqrt{\frac{J \cdot (1-A)}{\pi\sigma}}; \quad a_0 = a\frac{M}{M_0}.$$

Рассчитаем границы «зон жизни» для светлых и темных тел с характерными альбедо 0.6 и 0.2 соответственно:

	Очень светлые (A=0.9)	Светлые (A=0.6)
T = 300 K	a = 14.3 а.е., a_0 = 9.6 а.е.	a = 28.6 а.е., a_0 = 19.1 а.е.
T = 250 K	a = 20.6 а.е., a_0 = 13.8 а.е.	a = 41.2 а.е., a_0 = 27.5 а.е.
	Средние (A=0.4)	Темные (A=0.2)
T = 300 K	a = 35.1 а.е., a_0 = 23.4 а.е.	a = 40.5 а.е., a_0 = 27.1 а.е.
T = 250 K	a = 50.5 а.е., a_0 = 33.7 а.е.	a = 58.3 а.е., a_0 = 39.0 а.е.

Мы можем не фиксировать определенные значения альбедо, а получить общую формулу для внутренней и внешней границы «зоны жизни»:

$$a_1 = 45.3\ а.е.\sqrt{1-A}; \quad a_{01} = 30.2\ а.е.\sqrt{1-A};$$
$$a_2 = 65.2\ а.е.\sqrt{1-A}; \quad a_{02} = 43.6\ а.е.\sqrt{1-A}.$$

Мы видим, что для самых светлых тел зона жизни затрагивает орбиту Сатурна, для светлых тел зона жизни оказывается между орбитами Урана и Нептуна, для темных тел она включает орбиты Нептуна и Плутона. Из больших тел, включенных в справочные данные, критериям «зоны жизни» отвечает только сам Нептун с альбедо 0.4 и – на теплой границе зоны – спутник Сатурна Тефия с альбедо 0.9. В качестве других тел, которые могут попасть в «зону жизни» можно, но не обязательно, указать Харон (спутник Плутона с более низким альбедо) и ряд других транснептуновых тел.

Система оценивания.

Этап 1 – 3 балла. Вычисление фактора увеличения радиусов орбит тел Солнечной системы. Этап засчитывается только при правильном соотношении $a \sim M^{-1}$, при другом характере зависимости эти 3 балла не выставляются, последующие этапы оцениваются, исходя из правильности их выполнения. При использовании этой зависимости без вывода за этап выставляется 1 балл.

Этап 2 – 2 балла. Указание небесных тел, которые будут поглощены Солнцем, при этом должны быть рассмотрены все тела, описанные в справочных данных. Если указаны все тела (при правильном выполнении этапа 1 – Меркурий и Венера) и не указаны лишние – выставляются 2 балла, если указана только их часть – 1 балл. Если указаны какие-либо лишние тела (например, Земля) – оценка уменьшается на 1 балл за каждое лишнее указание, при этом оценка за этап не может быть меньше нуля.

Примечание. В случае неверного выполнения первого этапа список тел, которые должны быть указаны, может измениться. Например, при предположении постоянства орбит небесных тел в список поглощенных тел должны быть добавлены Земля и Луна, а ответ «Меркурий и Венера» при этом оценивается только 1 баллом.

<u>Этап 3 – 2 балла.</u> Правильное соотношение для средней температуры поверхности небесного тела с учетом его альбедо (либо – правильное выражение для границ «зоны жизни» в зависимости от альбедо). Если участник не учитывает альбедо – этап полностью не засчитывается вне зависимости от результатов следующих этапов (он оцениваются).

<u>Этап 4 – 1 балл.</u> Определение средней температуры самой горячей планеты – Земли, точность 200 K. Участник может указать, что горячая Земля растеряет атмосферу, что скажется на ее альбедо. Это не соответствует условию задачи, в котором указано на постоянство свойств планеты. Тем не менее, даже предположение о нулевом альбедо увеличит температуру Земли до 1650 K, что не выходит за рамки требуемой точности, поэтому этап может быть засчитан. Этап может быть зачтен, если участник по невнимательности найдет температуру Луны вместо Земли (около 1600 K), если он сделает это без ошибок.

Примечание. Если в результате неверного выполнения первого этапа самой горячей планетой оказывается не Земля, этап также оценивается, и в этом случае требуется точный анализ для той планеты, которая будет самой горячей в решении участника.

<u>Этап 4 – 2 балла.</u> Указание небесных тел, которые окажутся в «зоне жизни». Необходимо рассмотрение всех тел, указанных в справочных данных, при этом участник может рассматривать и другие небесные тела (например, другие спутники планет). Указание Нептуна и Тефии оценивается по 1 баллу, при этом участник может сказать, что рассмотрение возможности жизни на газовом гиганте не имеет смысла (это не меняет оценку). Участник может также указать, что Тефия расположена на грани или чуть за гранью зоны жизни, что также считается правильным.

При неверном выполнении предыдущих этапов список тел может меняться. При неверном указании тел, входящих в справочные данные, оценка уменьшается на 1 балл за каждое тело, но при этом она не может быть меньше нуля. Рассмотрение тел, не входящих в справочные данные, не изменяет оценку, только если в ответ не попали заведомо не подходящие для «зоны жизни» тела (на орбите Юпитера или еще ближе к Солнцу).

Примечание. Расчет температурных условий для двух характерных значений альбедо (0.2, 0.4, 0.6, 0.9 или каких-то иных) не является обязательным, это лишь один из возможных способов сократить объем вычислений. Участники вправе использовать другие подходы.

9.6. ДАЛЕКАЯ ГАЛАКТИКА *(А.М. Татарников)*

Условие. Диск далекой спиральной галактики расположен «плашмя» по отношению к лучу зрения. Характерная величина поверхностной яркости диска спиральной галактики 20^m с квадратной секунды. Определите характерное количество звезд в 1 пк^3 диска. Межзвездным поглощением света пренебречь.

Решение. Пусть расстояние до галактики равно D. Выражая его в парсеках, находим абсолютную звездную величину звезд, находящихся в одной квадратной секунде на небе:

$$M = m + 5 - 5\lg D = 25 - 5\lg D.$$

Будем считать, что характерная звезда диска – это звезда со светимостью $J = kJ_0$, где J_0 – светимость звезды типа Солнца с $M_0 \approx 5$, а коэффициент k для спиральной галактики можно взять равным от 0.4 до 1.0 (каждое значение в этом интервале может считаться правильным). Таких звезд в одной квадратной секунде галактики будет

$$N = 10^{-0.4\,(25 - 5\lg D - 5 - 2.5\lg k)} = 10^{-0.4\,(20 - 5\lg D - 2.5\lg k)} = 10^{2\lg D}/10^8 k = D^2/10^8 k.$$

С расстояния D под углом в 1″ будет видна часть галактики размером $x = D/206265$. Площадь участка размером в одну квадратную секунду будет равна

$$S = x^2 = D^2/206265^2 \text{ пк}^2.$$

Отсюда поверхностная плотность звезд будет равна $n = N/S \approx 400/k$. Будем считать, что толщина диска галактики равна 300 пк, что характерно для спиральных галактик. Тогда концентрация звезд составляет порядка 1-1.5 на кубический парсек, если предположить $k = 1$, и около 3 на кубический парсек при $k = 0.4$.

Система оценивания.

Этап 1 – 2 балла. Выражение для «суммарной» абсолютной звездной величины всех звезд галактики, расположенной в 1 квадратной секунде неба.

Этап 2 – 3 балла. Выражение для количества звезд галактики, попадающих в данную угловую площадь. Участники могут принимать среднюю светимость звезды, равную от 0.4 до 1.0 светимости Солнца, что является правильным.

Этап 3 – 3 балла. Выражение для пространственных размеров области галактики, попадающей в данную угловую область неба.

Этап 4 – 2 балла. Определение концентрации звезд в галактике. Участники могут брать толщину диска галактики от 250 до 400 пк.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

10.1. ПРОЛЕТАЯ НАД СТОЛИЦАМИ *(Е.Н. Фадеев)*

Условие. Спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли, последовательно побывал в зените в Каракасе (10°30′ с.ш., 66°56′ з.д.) и Кито (0°13′ ю.ш., 78°31′ з.д.) с интервалом 20 минут. Определите радиус и наклонение орбиты спутника.

Решение. Кито и Каракас расположены вблизи экватора. Здесь координатную сетку можно считать прямоугольной, а градус как по долготе, так и по широте равным 111.3 км. Разница долгот этих двух городов равна 11°35′, что при переводе в километры дает 1289 км. Разница широт этих двух пунктов составляет 10°43′ или 1193 км. По теореме Пифагора получаем расстояние между городами

$$S_{KK} = \sqrt{1289^2 + 1193^2} \approx 1756\,км$$

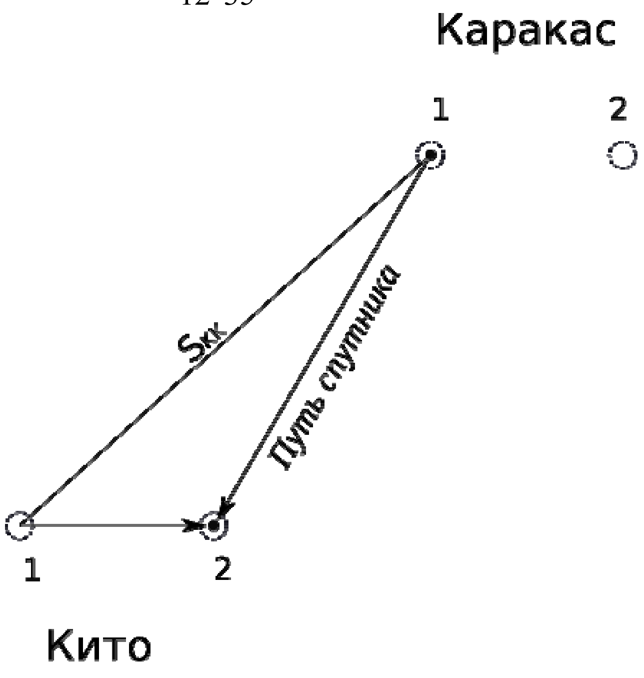
Казалось бы, мы знаем расстояние, которое преодолела «тень» спутника. Если рассуждать таким образом, то зная окружность Земли (40000 км), мы делаем вывод, что спутник за 20 минут пролетел почти 16° по своей орбите, а его период равен 456 минут или 7.6 часа.

Однако, мы не приняли во внимание, что за 20 минут Земля повернулась на 1/72 часть своего оборота, т.е на 5°. За 20 минут оба города сместились по долготе восток, и для Кито на экваторе это смещение составляет на S_E = 556 км. Поэтому, когда спутник пролетал над Кито, разница долгот между текущим положением Кито и предыдущим положением Каракаса составляла всего $\Delta\lambda$=6°35′ или 733 км. Отсюда получаем длину пути спутника за 20 минут:

$$S = \sqrt{733^2 + 1193^2} = 1400\,км$$

Спутник за это время прошел дугу орбиты в 12.6°, и его период

$$T = \frac{360°}{12°35'}20м \approx 570м \approx 9.5ч.$$



Сравнивая спутник с Луной по 3-му закону Кеплера, получаем

$$R = 384400 \cdot \left(\frac{9.5}{27.3 \cdot 24} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 22900 \text{ км}$$

Угол между орбитой спутника и экватором:

$$\gamma = arctan \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} = 58^{\circ},$$

Про наклонение спутника более корректно говорить, что оно равно 180° – 58° = 122°, так как спутник движется вокруг Земли с востока на запад (по часовой стрелке, если смотреть с севера).

Система оценивания.

<u>1 этап – 1 балл.</u> Вычисление разности широт Каракаса и Кито. Если участники упускают, что широта Кито южная, что приводит к незначительному изменению ответов (i = 123°, R = 23400 км), то оценка за этот пункт не выставляется, но остальные оцениваются в полном объеме.

<u>2 этап – 2 балла.</u> Вычисление разности долгот точек, в которых спутник пролетел над городами. Из них 1 балл ставится за определение разности долгот, и еще 1 балл за определение того, что вращение Земли приводит к уменьшению этой разности на 5°.

Вероятная ошибка участника: пропуск фактора вращения Земли, что приводит к ответам i = 164° и R = 19700 км. В этом случае за этот этап засчитывается только 1 балл, а за этапы 4 и 5 выставляется по 1 баллу при правильном решении, т. е. не более 5 баллов за всю задачу.

Если участник путает направление вращения Земли или как-то иначе приходит к тому, что вращение Земли увеличивает разность долгот на 5°, то за этот этап засчитывается только 1 балл, а этапы 4 и 5 оцениваются из 2 баллов каждый, т. е. не более 7 баллов за всю задачу.

<u>3 этап – 1 балл.</u> Вычисление углового или линейного расстояния между точками, в которых спутник пролетел над городами. Участники могут попытаться учесть кривизну Земли и воспользоваться формулами сферической тригонометрии, что при правильном выполнении не является ошибкой.

Этапы 1-3 можно с одинаковым успехом выполнять как в линейных, так и в угловых единицах, поэтому одинаково оцениваются оба подхода.

<u>4 этап – 3 балла.</u> Определение радиуса орбиты спутника. Вывод формулы для радиуса орбиты оценивается в 2 балла. Здесь возможны разные варианты действия. При решении в два действия с предварительным определением периода каждое из двух действий оценивается 1 баллом. Другие варианты, например, с использованием первой космической скорости, могут содержать одно действие. Вычисление числового ответа оценивается еще 1 баллом.

<u>5 этап – 3 балла.</u> Формула и числовое значение угла между плоскостями орбиты и земного экватора оцениваются по 1 баллу. Правильная формулировка ответа с указанием на то, что наклон орбиты больше 90° оценивается 1 баллом. Если в качестве наклонения указывается 58° (не учитывается направление вращения) – последний балл не выставляется.

10.2. В ЗАКАТНОМ НЕБЕ *(О.С. Угольников)*

Условие. Во время недолгого перерыва в работе строители новой научной базы на поверхности Марса любуются закатом Солнца. Сразу после него на фоне зари появились две яркие планеты – Венера и Земля, вступившие в тесное соединение (без покрытия) друг с другом невдалеке от Солнца на небе и имеющие одинаковую видимую яркость. Определите угловое расстояние Венеры и Земли от Солнца, а также величины их фаз. Считать орбиты всех планет круговыми. Принять также, что за счет плотных атмосфер и облаков поверхностная яркость освещенных частей дисков Венеры и Земли не зависит от фазового угла (между направлением на Солнце и наблюдателя). Сумеречными эффектами (освещенностью атмосфер Венеры и Земли во время сумерек) пренебречь.

Решение. Судя по описанию ситуации, Венера и Земля находились на марсианском небе недалеко от Солнца. Обе планеты для Марса являются внутренними, и для какого-либо фиксированного углового расстояния от Солнца возможны два положения планеты на орбите. Если это угловое расстояние маленькое – то планета находится либо вблизи верхнего, либо вблизи нижнего соединения. Рассмотрим сначала самый простой случай – обе планеты располагаются вблизи верхнего соединения с Солнцем, позади него в пространстве. Тогда их фазы близки к полным, а расстояния от Марса – примерно равным сумме радиусов орбиты Марса и Венеры (Земли). Для видимой яркости планеты можно записать:

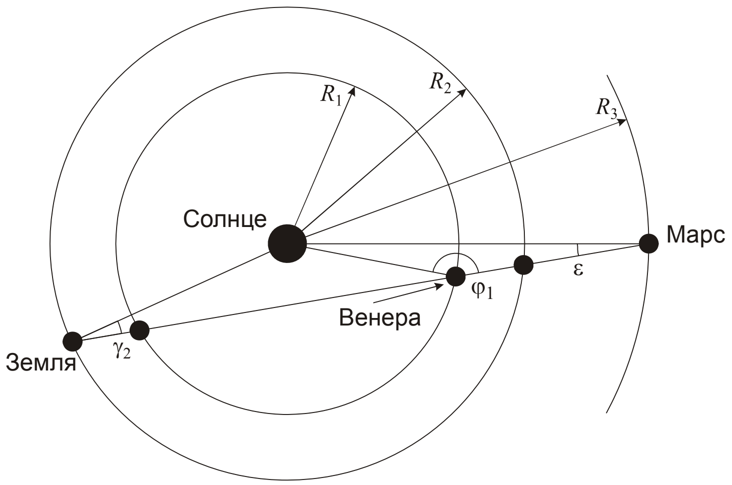
$$J_{1,2} = C \cdot \frac{B_0}{4\pi R_{1,2}^2} \cdot A_{1,2} \cdot \frac{\pi r_{1,2}^2}{4\pi (R_{1,2} + R_3)^2}.$$

Здесь B_0 – светимость Солнца, $R_{1,2,3}$ – радиусы орбит Венеры, Земли и Марса, $r_{1,2}$ – радиусы Венеры и Земли, $A_{1,2}$ – геометрическое альбедо Венеры и Земли, а C – некоторая константа, определяющая угловое распределение яркости отраженного планетой света. Для нас важно, что в соответствии с условием задачи эта константа одинакова для Венеры и Земли. Из этого мы можем получить разницу видимых звездных величин Венеры и Земли:

$$m_{1S} - m_{2S} = -2.5\lg\frac{J_{S1}}{J_{S2}} = -2.5\lg\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{(R_2 + R_3)^2}{(R_1 + R_3)^2}\right) = -1.45.$$

Из этого мы можем сделать вывод, что если обе планеты располагаются за Солнцем, Венера будет выглядеть заведомо ярче Земли. Это можно понять и на качественном уровне: Венера ближе к Солнцу, в этой конфигурации – ближе и к Марсу, у нее существенно больше альбедо. Разница радиусов Земли и Венеры очень незначительна и никак эти эффекты не компенсирует.

Рассмотрим другой случай – обе планеты располагаются вблизи нижнего соединения. Тогда существенное влияние на их видимую яркость оказывают их фазы, которые необходимо учесть. Пусть угловое расстояние планет от Солнца равно ε. Тогда по теореме синусов для фазового угла φ мы можем записать:



$$sin\,\varphi_{1,2} = sin\,\varepsilon\,\frac{R_3}{R_{1,2}}$$

Угол φ больше 90°, и для него мы имеем:

$$cos\,\varphi_{1,2} = -\sqrt{1 - sin^2\,\varphi_{1,2}} \approx -1 + \frac{sin^2\,\varphi_{1,2}}{2} = -1 + \frac{sin^2\,\varepsilon \cdot R_3^2}{2R_{1,2}^2}.$$

Фаза планеты составляет

$$F_{1,2} = \frac{1 + cos\,\varphi_{1,2}}{2} = \frac{sin^2\,\varepsilon \cdot R_3^2}{4R_{1,2}^2}.$$

По условию задачи, яркость планеты с фазой F есть яркость ее полного диска на том же расстоянии от Солнца и наблюдателя, умноженная на фазу. Отсюда мы получаем соотношение звездных величин Венеры и Земли, если они находятся близ нижнего соединения с Солнцем:

$$m_{1I} - m_{2I} = -2.5\,lg\,\frac{J_{1I}}{J_{2I}} = -2.5\,lg\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\cdot\frac{r_1^2}{r_2^2}\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{(R_3 - R_2)^2}{(R_3 - R_1)^2}\cdot\frac{F_1}{F_2}\right) =$$

$$= -2.5\,lg\left(\frac{R_2^4}{R_1^4}\cdot\frac{r_1^2}{r_2^2}\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{(R_3 - R_2)^2}{(R_3 - R_1)^2}\right) = -1.0.$$

И вновь Венера оказывается ярче Земли, причем на малых угловых расстояниях от Солнца эта разница практически постоянна. Совершенно очевидно, что нам не подойдет вариант, при котором Земля располагается вблизи нижнего соединения, а Венера – позади Солнца. Действительно, в этом случае фаза Венеры практически полная, расстояние до нее равно $R_1 + R_3$. Земля находится ближе к Марсу (расстояние $R_3 - R_2$), но имеет малую фазу. Определим, чему должна быть равна эта фаза F_2, чтобы видимые яркости могли сравняться:

$$\frac{J_{1S}}{J_{2I}} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\cdot\frac{r_1^2}{r_2^2}\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{(R_3 - R_2)^2}{(R_3 + R_1)^2}\cdot\frac{1}{F_2} = 1.$$

Отсюда мы получаем $F_2 = 0.20$. Это достаточно большая фаза. Для ее достижения фазовый угол Земли должен составлять $\varphi_2 = \arccos\,(2F_2 - 1) = 126.9°$. По теореме синусов мы можем определить элонгацию Земли:

$$\frac{\sin\varepsilon}{R_2} = \frac{\sin\varphi_2}{R_3}; \quad \varepsilon = 31.7^\circ.$$

Это больше, чем максимальная элонгация Венеры на Марсе (28.3°). Более того, мы можем принять во внимание, что в этом случае расстояние от Марса до Земли будет уже существенно больше, чем $R_3 - R_2$., и мы несколько переоцениваем яркость Земли. С другой стороны, Венера в наибольшей элонгации, несмотря на фазу 50% светит даже ярче, чем в верхнем соединении, за счет меньшего расстояния до Марса, соответствующая разница составляет 0.37^m. В итоге, предположение о Земле вблизи нижнего соединения не дает нам решения задачи.

Нам остается предположить единственный вариант: Земля находится позади Солнца и имеет практически полную фазу (будем считать ее в первом приближении равной единице), а Венера, наоборот, располагается между Солнцем и Марсом и имеет вид тонкого серпа. Запишем выражение для отношения яркостей Венеры и Земли:

$$\frac{J_{1I}}{J_{2S}} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{(R_3 + R_2)^2}{(R_3 - R_1)^2} \cdot F_1.$$

Считая яркости Земли и Венеры равными, определим фазу Венеры:

$$F_1 = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{(R_3 - R_1)^2}{(R_3 + R_2)^2} = 0.033.$$

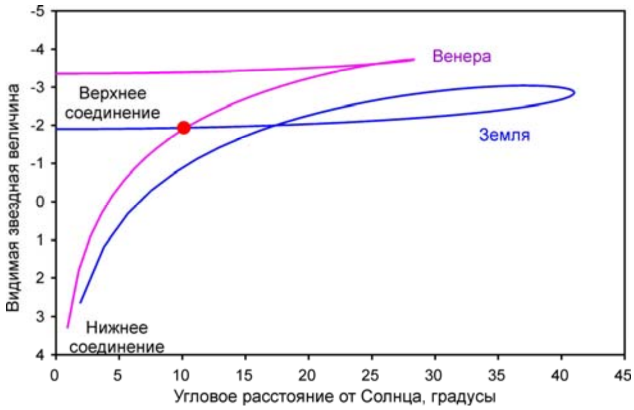
Теперь мы можем определить угловое расстояние Венеры (и Земли) от Солнца:

$$sin^2\,\varepsilon = \frac{4F_{1,2} \cdot R_1^2}{R_3^2}; \quad \varepsilon = 10^\circ.$$

Очевидно, что на столь малом угловом расстоянии от Солнца фаза Земли вблизи верхнего соединения, как мы и предполагали, близка к единице. Однако мы можем определить ее и более точно. Из теоремы синусов (см. рисунок) мы имеем

$$sin\,\gamma_2 = sin\,\varepsilon\frac{R_3}{R_2}; \quad \gamma_2 = 15^\circ;$$

$$F_2 = \frac{1 + cos\,\gamma_2}{2} = 0.983.$$



Хотя мы использовали приближенный вариант решения, мы получили ответ, очень близкий к точному, с учетом предположения об отражающих свойствах атмосфер Венеры и Земли. Точное угловое расстояние Земли и Венеры от Солнца составляет 10.3°, фаза Венеры – 0.037, фаза Земли – 0.981. И это единственный возможный вариант соединения с равным блеском, в чем можно убедиться из диаграммы «элонгация от Солнца – видимая звездная величина» для Венеры и Земли на Марсе:

Система оценивания.

1-3 этапы – 2+2+2 балла. Обоснованное указание, что для решения задачи не подходят три варианта расположения Земли и Венеры: обе планеты вблизи верхнего соединения; обе планеты вблизи нижнего соединения; Венера вблизи верхнего соединения, Земля вблизи нижнего соединения. В первых двух случаях должна быть получена оценка разницы видимых звездных величин (или соотношения видимых яркостей) Земли и Венеры, которая практически не зависит от элонгации и все время оказывается в пользу Венеры. Третий вариант (Земля вблизи Марса, а Венера позади Солнца) может быть объяснен через вычисление соответствующей фазы и элонгации Земли, как сделано выше, а может быть отвергнут как достаточно очевидно не соответствующий условию, но в обязательном порядке быть упомянут.

Если участник в ходе ошибочного решения допускает один из этих вариантов, то ему не выставляется 2 балла, соответствующие анализу этого варианта. Он также не получает баллы за последующие этапы решения, сделанные в рамках этого предположения. Тем не менее, он может получить баллы за последующие этапы, если правильный вариант (Венера вблизи нижнего соединения, Земля вблизи верхнего соединения) им верно рассматривается.

4 этап – 2 балла. Определение элонгации Венеры и Земли в момент соединения. Оценивается лишь подход, соответствующий правильному предположению (Венера у нижнего соединения, Земля у верхнего соединения), при этом участник может использовать как приближенные величины расстояний до планет (соответствующих соединению), так и пытаться уточнить их. Точность определения элонгации – 1°, то есть полностью может быть оценено только правильно обоснованное решение с ответом от 9° до 11°. При погрешности до 3° и правильном подходе за этап выставляется 1 балл.

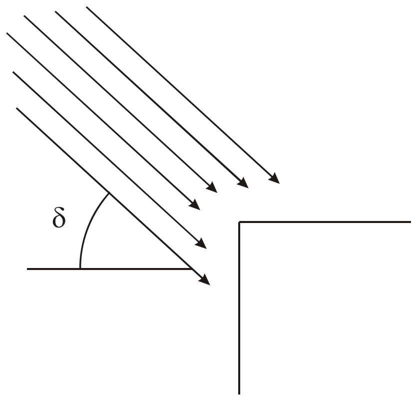
5 этап – 2 балла. Определение фаз обеих планет (по 1 баллу за каждую), точность – 0.01. Таким образом, фаза Земли, равная в точности 1.0, правильным ответом не является.

Альтернативный подход к решению: разделение на возможные случаи (верхнее/нижнее соединение Венеры и Земли) не проводится, а строится зависимость яркости (или звездной величины) от углового расстояния от Солнца для любого положения Земли и Венеры. Математически это достаточно сложно, но может быть исполнено графически на основе расчетов при некоторых значениях элонгации. В результате, должна быть получена диаграмма, аналогичная приведенной в конце решения. Если расчеты выполнены верно, и в итоге получается одно пересечение кривых, соответствующих Венере и Земле при их правильной конфигурации, то при условии выполнения всех требований по точности решение засчитывается полностью. Наличие других решений (что является следствием ошибок при вычислениях) уменьшает оценку на 2 балла за каждое такое решение. При этом к правильной модели решения предъявляются такие же требования по точности.

10.3. КУБОДЕТЕКТОР *(О.С. Угольников)*

Условие. В жесткой гамма-области, где невозможно построение телескопа как оптической схемы, направление на источник иногда определяется по отношению потоков энергии от него через площадки детектора, по-разному ориентированные в пространстве. В космос запускается гамма-детектор, имеющий форму куба, каждая из шести граней которого имеет одинаковую чувствительность и фиксирует поток энергии через свою площадь с внешней стороны куба. Она это делает с точностью 3%, то есть при истинном потоке J измеренный с равной вероятностью будет лежать в интервале от $0.97J$ до $1.03J$. Определите максимально возможную угловую «площадь ошибок» (в квадратных градусах) участка неба, где может находиться источник, координаты которого измерены детектором один раз.

Решение. Точность определения координат подобным способом будет разной в зависимости от положения источника относительно граней куба. Будем считать для простоты, что одна грань ориентирована к Северному полюсу мира, еще одна, граничащая с ней – в точку весеннего равноденствия. Предположим для начала, что все четыре грани, ориентированные в точки небесной сферы на экваторе, измеряют сигнал от источника абсолютно точно. Если прямое восхождение источника совпадает с прямым восхождением перпендикуляра к одной из этих граней, то источник будет зафиксирован этой гранью, а также полярной гранью (будем считать склонение источника положительным).



Если склонение источника равно δ, а плотность потока излучения равна F, то при идеальной точности экваториальная и полярная грани зафиксируют потоки

$$J_E = F\,d^2 \cos\delta,$$
$$J_P = F\,d^2 \sin\delta,$$

где d – длина ребра куба. Тогда склонение можно было бы определить по формуле

$$\delta = \mathrm{arctg}\,(J_P / J_E).$$

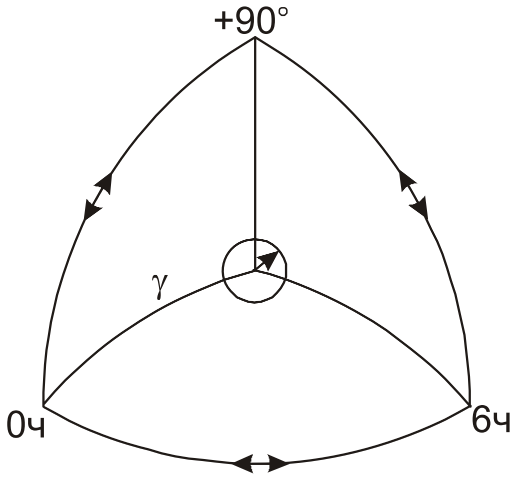
Учтем теперь, что полярный поток определяется с погрешностью $J_P \cdot (1 \pm \varepsilon)$. Тогда мы имеем граничные значения измеренного склонения:

$$\mathrm{tg}\,(\delta - \Delta\delta) = \mathrm{tg}\,\delta \cdot (1 - \varepsilon); \quad \mathrm{tg}\,(\delta + \Delta\delta) = \mathrm{tg}\,\delta \cdot (1 + \varepsilon).$$

Пользуясь формулами приближенного вычисления, приведенными в справочных данных, имеем:

$$\varepsilon\, tg\delta = \frac{\Delta\delta}{cos^2\delta}; \quad \Delta\delta = \varepsilon \sin\delta \cos\delta.$$

Мы получаем, что вблизи экватора или полюса, когда источник находится около нормали к какой-то одной грани, погрешность уменьшается (в реальности, она определяется там шумами детектора, полезный сигнал от которого стремится к нулю, но мы этот эффект здесь не рассматриваем). Максимальной погрешность будет при δ = 45° и составит ε/2 радиан. В данных рамках – мы пока считаем, что погрешность есть только у полярного детектора – ситуация не изменяется, если источник не находится на одном прямом восхождении с нормалью экваториального детектора, так как потоки на экваториальные детекторы мы знаем точно. Погрешность полярного детектора приводит к ошибке координаты δ, то есть положение источника смещается вдоль линии небесной сферы, направленной к положению нормали того детектора, который измерил поток с погрешностью.



Рассмотрим теперь общий случай – все детекторы обладают одинаковой погрешностью измерений. Рассмотрим оси трех детекторов, граничащих друг с другом, пусть одна по-прежнему направлена в Северный полюс мира, а две другие – в точки небесного экватора с прямыми восхождениями 0ч и 6ч. Если источник находится на большом круге небесной сферы, соединяющем какие-либо две из этих точек, то погрешность измерений будет смещать источник только вдоль этого большого круга (мы не учитываем шумы третьего детектора с нулевым полезным сигналом), стрелки на рисунке. Максимальная погрешность будет достигаться в середине этой дуги между двумя осями, но площадь ошибок будет оставаться близкой к нулю.

Для рассмотрения максимальной площади нам нужно рассмотреть центр равностороннего сферического треугольника, образованного тремя точками – осями детекторов. Очевидно, что его прямое восхождение составляет 3ч. Определим его склонение δ. Соединим эту точку с Северным полюсом мира и точкой весеннего равноденствия. В этом равнобедренном треугольнике две одинаковые стороны равны γ = 90° – δ, а угол между ними – 120°. Основание треугольника равно 90°, его косинус равен нулю. Запишем выражение для сферического треугольника:

$$0 = cos^2\gamma + sin^2\gamma \cos 120^\circ = cos^2\gamma - \frac{sin^2\gamma}{2}; \quad \gamma = arctg(\sqrt{2}) = 54.7^\circ.$$

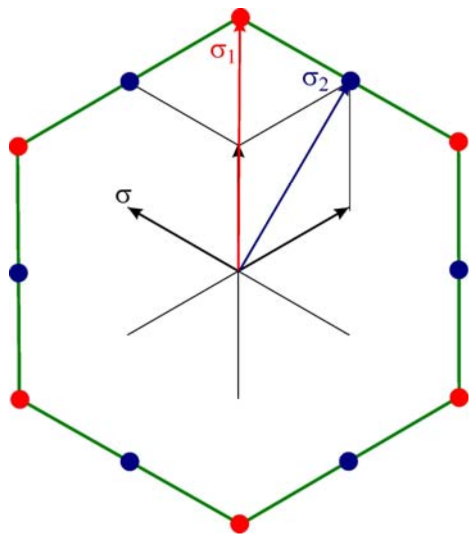
Склонение данной точки составляет 35.3°. Определим величину максимальной погрешности, которую вносит каждая грань (в радианах):

$$\sigma = \varepsilon \sin\gamma \cos\gamma = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{3}.$$

Смещение источника за счет погрешностей каждой из граней будет происходить вдоль большого круга, направленного к оси грани. Рассмотрим предельный случай, при котором все три погрешности дадут максимальный суммарный эффект. Как мы видим из рисунка, этот эффект будет слегка зависеть от направления погрешности. В сторону одной из осей куба смещение может достигать $\sigma_1 = 2\sigma$. В направлении между положениями осей (под углом 30° к направлению на ось) максимальная погрешность составляет

$$\sigma_2 = 2\sigma \cos 60^\circ = \sigma\sqrt{3}.$$

Тем самым, мы знаем величины погрешности в шести направлениях к полюсам детекторов и еще в шести направлениях биссектрис между полюсами. По ним можно понять характер всей фигуры на небе, в которой может находиться источник:



Это правильный шестиугольник, сторона которого равна σ_1. Его площадь равна шести площадям равностороннего треугольника с той же стороной:

$$S = 6\cdot\frac{\sigma_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sigma_1^2\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \sigma^2\cdot 6\sqrt{3} \approx 10.4\cdot\sigma^2.$$

В качестве приближенного варианта вместо шестиугольника может выступать круг с радиусом, равным среднему арифметическому из σ_1 и σ_2, что даст в итоге ответ

$$S \approx \pi\sigma^2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \approx 10.9\cdot\sigma^2,$$

либо же считать, что площадь фигуры есть среднее арифметическое от площадей кругов с радиусами σ_1 и σ_2:

$$S \approx \pi\sigma^2\left(\frac{4+3}{2}\right) \approx 11.0 \cdot \sigma^2.$$

Все эти оценки могут считаться правильными. Чуть худшую точность дает предположение, что данная фигура есть просто круг с радиусом σ_1 (фактически, круг, описанный около данного шестиугольника, площадь $12.5\sigma^2$) или σ_2 (вписанный круг, площадь $9.4\sigma^2$). Воспользовавшись далее точной формулой, свяжем площадь фигуры с относительной погрешностью детекторов ε:

$$S = \varepsilon^2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2.31 \cdot \varepsilon^2.$$

Значение ε есть 0.03 радианы или 1.72°, максимальная «площадь ошибок» на небе составляет 6.8 квадратных градуса.

Система оценивания (в случае точного построения решения):

1 этап – 3 балла. Качественное рассмотрение зависимости «площади ошибок» от расположения источника на небе. В ходе этапа участники должны убедиться, что при подобных характеристиках прибора «зона ошибок» сжимается в точку, когда источник расположен на оси одного из граней детектора (и перпендикулярен двум другим) и в короткий отрезок на небесной сфере – если источник перпендикулярен одной из граней (по 1 баллу за каждый вывод). Максимальной площадь ошибок будет в том случае, если источник равноудален от осей пересекающихся трех граней, то есть находится на продолжении триагонали куба (еще 1 балл).

2 этап – 1 балл. Определение погрешности, вносимой одной гранью, в зависимости от углового расстояния от ее оси (γ), $\sigma = \varepsilon \sin 2\gamma / 2$. Оценивается только при верном выражении или численном значении.

3 этап – 2 балла. Определение углового расстояния от продолжения триагонали до осей детекторов и вычисление погрешности, вносимой одной гранью (σ) на таком угловом расстоянии. Может выполняться как через сферическую теорему косинусов (см. выше), так и более простым образом – по теореме Пифагора с учетом того, что данный угол – есть угол между коротким катетом (гранью) и гипотенузой (триагональ) прямоугольного треугольника, образованного двумя соседними вершинами куба и вершиной, противоположной одной из них. Учитывая, что длина триагонали куба со стороной h есть $h\sqrt{3}$, а длина диагонали – $h\sqrt{2}$, получаем, что данный угол есть arctg ($\sqrt{2}$) или arccos ($1/\sqrt{3}$).

Вероятная ошибка при выполнении этапа: участник предполагает, что угловое расстояние от оси граней составляет 45°. В результате, коэффициент перед выражением погрешности от одной грани (σ) оказывается равным 1/2 вместо $\sqrt{2}/3$. Эффект незначителен, поэтому оценка за этап снижается на 1 балл, остальные оцениваются в полной мере.

4 этап – 4 балла. Определение площади фигуры ошибок. При ее точном представлении (шестиугольник) и отсутствии иных ошибок этап оценивается полностью. При ее представлении в виде круга с радиусом, средним между σ_1 и σ_2, этап оценивается из 3 баллов. Если участники берут в качестве радиуса одну из этих величин, то при правильных вычислениях этап оценивается в 2 балла. Точность численного значения (без учета допущений, описанных выше) должна быть не хуже 10%. При ошибке до 20% оценка уменьшается на 1 балл, до 30% – на 2 балла.

Вероятное приближенное решение всего задания: участник переводит относительную погрешность ε (0.03) из радиан в градусы (1.72°). Далее площадь ошибок считается кругом с этим радиусом, и в результате получается ответ 9.3 квадратных градуса, что на 25% больше верного. В этом случае считается, что участник не выполнил первый этап решения, но получил неплохую реализацию 2-4 этапов, ошибка соответствует снижению финальной оценки на 2 балла. Таким образом, итоговая оценка составляет 5 баллов. В случае ошибки в 2 или 4 раза (например, если угол ε считается диаметром, а не радиусом круга ошибок) оценка уменьшается на 2 балла.

10.4. ТАИНСТВЕННЫЙ МИР *(А.А. Автаева)*

Условие. Экспедиция прибыла на планету, обращающуюся вокруг далекой звезды, и приступила к исследованиям. Оказалось, что в месте базирования экспедиции местная звезда каждый день проходила через зенит, но климат существенно менялся в течение года. Участники экспедиции заметили, что ночью комфортные условия (T=+20°C) в палатке без обогрева в теплый сезон достигались при длительном нахождении там одного человека, а в холодный сезон для этого требовалось присутствие сразу трех человек. При этом «солнечные» сутки в теплый сезон были на 0.2% длиннее, чем в холодный, а местный год состоял из 100 местных «солнечных» суток. Перепад температур между ночью и днем был постоянен в течение года и составлял 20°. Атмосфера была вполне пригодной для дыхания, при этом была очень сухой и не обладала парниковыми свойствами, поверхность состояла в основном из очень темных пород, имеющих малую теплопроводность. Спектральный состав излучения звезды и ее физические свойства были аналогичны солнечным. Определите период осевого вращения планеты и эксцентриситет ее орбиты.

Решение. Коль скоро звезда в течение всего года ежедневно проходила через зенит в данной точке планеты, мы можем сделать вывод, что плоскость экватора планеты совпадала с плоскостью ее орбиты, и экспедиция работала как раз на экваторе. Сезонные изменения климата в этом случае могли быть вызваны эксцентриситетом орбиты планеты.

Обратим внимание на тот факт, что длительность солнечных суток (промежуток времени между двумя последовательными кульминациями центральной звезды) на планете изменялась в течение года. На Земле этот эффект тоже наблюдается, у нас он вызван двумя факторами: эллиптичностью орбиты и наклоном экватора к ее плоскости. На далекой планете второго эффекта нет, и изменение длительности солнечных суток определяется только эллиптичностью орбиты.

Солнечные сутки на Земле чуть длиннее периода оборота Земли вокруг своей оси, так как за эти сутки Земля успевает сделать часть оборота вокруг Солнца, причем в том же направлении. В результате, Земле нужно повернуться вокруг своей оси на тот же угол, что она прошла в своем движении по орбите. Если орбита планеты отлична от круговой, и она вращается вокруг звезда в том же направлении, что и вокруг своей оси, то в соответствии со II законом Кеплера этот угол будет чуть больше в перицентре и меньше в апоцентре. Именно такая ситуация реализуется на планете – в теплый период «солнечные» сутки – будем их так называть – длиннее, чем в холодный период.

Всего в году насчитывается 100 суток, и за это время планета успевает сделать 101 оборот вокруг своей оси. Средняя продолжительность солнечных суток S_0 есть $1.01t$, где t – период осевого вращения планеты. Средняя угловая скорость орбитального вращения планеты равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}.$$

Здесь τ – орбитальный период планеты. Обозначив эксцентриситет орбиты как e, сравним длительность солнечных суток в перицентре и апоцентре орбиты. В эти моменты линейная скорость планеты перпендикулярна радиусу-вектору, а расстояние до нее составляет $a \cdot (1 - e)$ и $a \cdot (1 + e)$ соответственно. Для угловых скоростей движения планеты в перицентре и апоцентре имеем

$$\omega_{P,A} = \sqrt{\frac{GM}{a^3} \cdot \frac{(1 \pm e)}{(1 \mp e)^3}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 \pm e)}{(1 \mp e)^3}}$$

Солнечные сутки на планете есть звездные сутки t и малая добавка, связанная с видимым смещением звезды за счет орбитального движения планеты. Длительность солнечных суток S с хорошей степенью точности можно представить в виде

$$S = t + C \cdot \omega.$$

Для средней длительности солнечных суток имеем:

$$S_0 = t + C \cdot \omega_0 = 1.01 \cdot t; \quad C = 0.01 \cdot t / \omega_0.$$

Длительность солнечных суток в перицентре и апоцентре:

$$S_{P,A} = t + C\omega_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 \pm e)}{(1 \mp e)^3}} = t + 0.01t \cdot \sqrt{\frac{(1 \pm e)}{(1 \mp e)^3}}.$$

Их соотношение есть

$$\frac{S_P}{S_A} = \frac{t + 0.01t \cdot \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)^3}}}{t + 0.01t \cdot \sqrt{\frac{(1-e)}{(1+e)^3}}} \approx 1 + \frac{0.01}{1.01} \cdot 4e = 1.002,$$

Отсюда получаем e = 0.05, мы ответили на один из вопросов задания. Рассмотрим теперь тепловые условия на поверхности планеты. Как мы уже поняли, путешественники находились на ее экваторе. Нулевой наклон экватора к плоскости орбиты, сухость атмосферы и низкая теплопроводность грунта указывают на очень резкие перепады температур между экватором и полюсами. Поэтому относительно комфортные тепловые условия, с которыми столкнулись путешественники, не могут относиться ко всей планете в целом. Мы не будем рассматривать усредненный тепловой баланс планеты, а возьмем тонкое экваториальное кольцо на ее поверхности с малой шириной h. Приравняем количество приходящей и исходящей от этого кольца энергии:

$$\frac{J_0}{4\pi L^2} \cdot 2Rh = 2\pi Rh \cdot \sigma T^4; \quad T^4 = \frac{J_0}{4\pi^2 \sigma L^2}.$$

Здесь мы должны дать два комментария. Первое – мы не учитываем альбедо планеты, так как по условию задачи грунт темный; второе – если бы мы вычисляли среднюю температуру (см. например задание 3 в 10 классе) – мы бы получили коэффициент в знаменателе 16π вместо $4\pi^2$, что уменьшило бы итоговое значение температуры на 6%, и это существенно. Очевидно, что температура обратно пропорциональна расстоянию до планеты L в степени 0.5. Найдем отношение средних температур летом и зимой:

$$\frac{T_P}{T_A} = \sqrt{\frac{L_A}{L_P}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 1 + e = 1.05.$$

Чтобы определить сами температуры, учтем, что ночью, когда температуры равны (T_P – 10°) летом и (T_A – 10°) зимой, для обеспечения комфортной температуры T_C в палатке зимой внутри нее требовался втрое более мощный обогрев, чем летом. Считая, что отток тепла от палатки пропорционален разнице температур внутри и снаружи палатки, и что этот отток равен темпу нагрева палатки находящимися внутри людьми, получаем

$$\frac{T_C - (T_A - 10^\circ)}{T_C - (T_P - 10^\circ)} = 3.$$

Подставляя сюда предыдущую формулу, имеем:

$$T_A = \frac{T_C + 10^\circ}{1.075} = 282K; \quad T_P = 296K.$$

Возвращаясь к уравнению теплового баланса и зная светимость звезды, определяем расстояние до нее (например, в афелии):

$$L_A = \sqrt{\frac{J_0}{4\pi^2 \sigma T_A^4}} = 1.106 \text{ а.е.}$$

Среднее расстояние планеты от Солнца составляет 1.054 а.е. Так как звезда похожа на Солнце, мы получаем значение периода обращения планеты: 1.08 земных лет. За это время проходит 101 оборот планеты вокруг звезды. Таким образом, период осевого вращения есть 3.91 земных дня.

Система оценивания.

<u>1 этап – 1 балл.</u> Указание, что экспедиция находится на экваторе планеты, которое должно быть сделано в явном виде. Если оно подразумевается в дальнейшем решении, но не указано напрямую, данный этап не засчитывается, последующие оцениваются, исходя из их исполнения.

<u>2 этап – 4 балла.</u> Определение эксцентриситета орбиты планеты. Оно должно быть сделано на основе информации о разной длительности солнечных суток в разные периоды года. Данные о температуре (нахождение в палатке) для этого недостаточны и не могут быть использованы для определения эксцентриситета без привлечения информации о длительности суток.

Возможная ошибка при выполнении этапа: участник предполагает, что разница в 0.2% в длительности солнечных суток летом и зимой – и есть эксцентриситет, равный 0.002. Возможно также умножение или деление эффекта на фактор 2 с ответами 0.001 и 0.004. Во всех этих случаях этап не засчитывается полностью (0 баллов).

Возможная ошибка при выполнении этапа: неверно используется II закон Кеплера, считается, что соотношение угловых скоростей звезды в перицентре и апоцентре есть (1+e) / (1–e) в первой, а не второй степени. Это в итоге дает вдвое больший эксцентриситет, 0.1. При отсутствии иных ошибок этап оценивается в 2 балла. При еще большей ошибке (например, если соотношение угловых скоростей принимается равным (1 + e) и далее e = 0.2) этап оценивается не выше 1 балла.

Возможная неточность при выполнении этапа: указание, что в году на этой планете 100, а не 101 звездных суток. В данном случае это не приводит к заметной ошибке при определении эксцентриситета, поэтому эта неточность не влияет на оценку за данный этап.

<u>3 этап – 2 балла.</u> Определение летней, зимней или средней температуры на планете (достаточно определить любую одну из этих величин) исходя из температурных условий ночью в палатке. Если участник забывает, что температура ночью на 10° ниже средней, этап не засчитывается, остальные оцениваются в полной мере.

<u>4 этап – 1 балл.</u> Выражение для средней температуры на экваторе планеты. Участник должен отметить, что экваториальная температура не совпадает со средней температурой на планете вообще. Если в качестве температуры определяется среднее значение по планете вообще (с коэффициентом 16π в знаменателе) – данный этап не оценивается, последующие оцениваются в полной мере.

<u>5 этап – 1 балл.</u> Определение среднего расстояния планеты от звезды, исходя из ее средней температуры, точность – 0.03 а.е., без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах.

<u>6 этап – 1 балл.</u> Определение периода орбитального вращения планеты и далее – периода ее осевого вращения. Точность – 5%. Подстановка количества звездных суток в годе – 100 вместо 101 не выводит ответ за пределы заданной точности и на оценку не влияет.

Возможное приближенное выполнение этапов 3-6: предположение, что планета находится ровно в 1 а.е. от центральной звезды, без обоснований. При правильном ответе (сутки составляют 3.62 земных суток) за все этапы вместе выставляется 2 балла.

10.5. УРАНОВОЕ СОЛНЦЕ *(О.С. Угольников)*

Условие. На заре развития ядерной физики было высказано предположение, что энерговыделение Солнца в течение многих миллиардов лет обеспечивалось распадом урана-238. Известно, что период полураспада этого изотопа урана составляет 4.47 млрд лет, что можно считать равным возрасту Земли, который был уже известен к тому времени. При этом образуются другие радиоактивные изотопы, распад которых происходит существенно быстрее. Энерговыделение в ходе всего цикла реакций, начиная с одного атома ^{238}U, составляет 6.7 МэВ. Определите минимально возможную массу Солнца в предположении такого механизма его свечения.

Решение. В ходе распада урана количество его атомов в «гипотетическом» Солнце меняется по экспоненциальному закону:

$$N = N_0 \cdot exp(-t\, ln 2 / T),$$

где T – период полураспада урана. Светимость Солнца тогда будет равной

$$J = -E\frac{dN}{dt} = \frac{N_0 E\, ln 2}{T} exp(-t\, ln 2 / T).$$

Здесь E – энерговыделение всего цикла реакций на один атом урана, равное 6.7МэВ или $1.07 \cdot 10^{-12}$ Дж. Здесь важно заметить, что момент t = 0 – это не настоящая эпоха, а начало свечения Солнца. Мы знаем, что возраст Солнца и Земли не меньше одного цикла полураспада урана, то есть в настоящее время $t \geq T$. Светимость Солнца в настоящую эпоху в этом случае обеспечивается примерно половиной от исходного ядерного топлива. Исходя из этого, запишем выражение для минимального количества атомов урана в начале эволюции Солнца:

$$N_0 = \frac{2JT}{E\, ln 2} = 1.5 \cdot 10^{56}.$$

Зная молярную массу урана μ (0.238 кг/моль), определим минимальную массу «уранового Солнца» в начале своей эволюции:

$$M = \frac{N_0 \mu}{N_A} = 6 \cdot 10^{31} \text{ кг}.$$

Это в 30 раз больше истинной массы Солнца, в котором в настоящее время горит лишь часть водорода в ядре. Полученный ответ наглядно демонстрирует существенное превосходство термоядерных процессов над ядерными в энерговыделении на единицу массы.

Система оценивания.

1 этап – 4 балла. Выражение для светимости «уранового» Солнца как функции времени и количества (либо массы) урана. Оно может быть выведено из экспоненциального закона распада урана (первая формула решения), может быть записана напрямую.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: опускание фактора ln2 в этой формуле. В этом случае оценка за этап не превосходит 1 балла, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 4 балла. Определение минимального количества атомов урана (численно или в виде формулы) на Солнце, точность при численном выражении 10%, без учета ошибок на предыдущем этапе.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: опускание факта, что Солнце уже существует в течение одного периода полураспада урана, и его максимальное количество вдвое больше настоящего. В этом случае оценка за этап не превосходит 1 балла, последующие оцениваются в полной мере.

3 этап – 2 балла. Определение минимальной массы «уранового» Солнца. Она может быть выражена в стандартных единицах или в массах Солнца, любого выражения достаточно. Точность 10%, без учета ошибок на предыдущих этапах.

10.6. ГИГАНТСКИЙ ОБЗОР НЕБА *(В.Б. Игнатьев)*

Условие. В 2024 году планируется к запуску проект LSST (Large Synoptic Survey Telescope) или телескоп имени Веры Рубин, построенный в Чили (широта –30°). Одна из основных задач этого телескопа – автоматизированный поиск сверхновых звезд. Телескоп имеет составное зеркало эффективным диаметром 6.7 метра и поле зрения 9.6 квадратного градуса. Телескоп оснащен системой адаптивной оптики, исправляющей атмосферные искажения, и системой ПЗС-матриц общим объемом 3.2 гигапикселя. Авторы проекта считают, что телескоп может делать полный обзор всей видимой из обсерватории части неба (высота объекта над горизонтом не менее 55°) за 3 ночи и за 10 лет открыть 3 миллиона сверхновых звезд. На основании этих данных оцените количество спиральных галактик на кубический мегапарсек.

Считайте, что сверхновые звезды вспыхивают в основном в спиральных галактиках, и это происходит в каждой из них в среднем раз в 100 лет. Фон неба в месте постройки обсерватории составляет 21.5^m на квадратную секунду, сверхновую можно обнаружить, если средние отсчеты от нее хотя бы на одном пикселе матрицы превосходят отсчеты от фона. Межзвездным поглощением и влиянием космологических факторов на видимую яркость далеких объектов пренебречь.

Решение. Для начала определим, какая область неба в принципе может быть доступна наблюдениям с этим телескопом в течение года. Так как телескоп находится на широте –30°, а объект должен подняться не менее чем на 55° (зенитное расстояние не больше 35°) над горизонтом, мы получаем интервал склонений, доступных наблюдениям: –30°±35°, то есть от –65° до +5°. Мы видим, что наблюдениями будет охвачена большая часть южного полушария и небольшая часть северного. Можно сразу предположить для простоты, что обзор будет производиться для половины небесной сферы. Действительно, угловая площадь этой зоны составляет

$$S = 4\pi - 2\pi(\sin 5^\circ + \sin 65^\circ) \approx 2\pi.$$

Однако, не всякая сверхновая, вспыхнувшая в этой области неба, будет обнаружена. Если она окажется недалеко от Солнца на небе, то в темное время суток она не сможет оказаться на высоте 55°. Так как нас в задаче интересуют самые и далекие сверхновые, они могут наблюдаться только вблизи максимума блеска, который длится не столь долго. Будем считать, что сверхновую можно наблюдать, если она удалена от Солнца хотя бы на 60° (4 часа) по прямому восхождению. Тогда мы видим, что вероятность сверхновой быть обнаруженной составляет 2/3. С учетом ограничений на область неба, делаем вывод, что телескоп обнаружит одну треть всех сверхновых, которые будут иметь на небе яркость не ниже некоторого предела.

Чтобы найти этот предел, оценим разрешающую способность телескопа. Так как атмосферные искажения телескопа по условию задачи мы считаем исправленными, разрешение будет определяться двумя факторами – дифракционным размером источника и пикселизацией приемника. Дифракционное разрешение составляет

$$\delta_1 = 0.14'' / D = 0.02''.$$

Здесь D – диаметр телескопа в метрах. Чтобы определить угловой размер, соответствующий одному пикселю, выразим поле зрения телескопа в квадратных секундах, получаем $9.6 \cdot 3600^2 = 1.24 \cdot 10^8$. Самих пикселей $3.4 \cdot 10^9$, таким образом, каждый пиксель соответствует примерно 0.04 квадратной секунды, линейный размер – 0.2″, что больше дифракционного изображения. Так как фон неба с квадратной секунды соответствует 21.5^m, определим, каким он будет с одного пикселя:

$$m = 21.5 - 2.5 \lg 0.04 = 25.$$

Именно такого блеска должна достичь сверхновая, чтобы быть обнаруженной. Будем считать абсолютную звездную величину сверхновой равной –18.5 (это среднее значение между сверхновыми I и II типов). Определим предельное расстояние до сверхновой, на котором она может быть обнаружена:

$$lg\, r = 1 + \frac{m - M}{5} = 9.7. \quad r = 5\ Гпк.$$

Если ориентироваться на слова авторов проекта, то за 10 лет будет обнаружено 3 миллиона сверхновых звезд. Значит, всего на расстоянии до 5 Гпк их произойдет 9 миллионов. Если бы наблюдения длились еще в 10 раз больше, то сверхновых могло бы быть 90 миллионов, и за это время они бы вспыхнули в среднем по разу в каждой спиральной галактике. Значит, именно такое количество галактик предполагается внутри шара с радиусом 5000 Мпк. Объем этого шара равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 5 \cdot 10^{11}\ Мпк^3.$$

Итак, концентрация спиральных галактик предполагается равной около $2 \cdot 10^{-4}$ Мпк$^{-3}$. Это существенно меньше концентрации спиральных галактик в наших окрестностях, но это не должно удивлять: галактики во Вселенной располагаются неоднородно.

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Определение доли небесной сферы, доступной наблюдениям с телескопом. Для этого участники олимпиады должны определить минимальное и максимальное склонение этой части небесной сферы. Если после их правильного определения участник сразу пишет, что эта доля равна примерно половине небесной сферы – это может быть засчитано как полностью выполненный этап. При попытке более точного расчета ответ не должен отличаться от половины небесной сферы больше, чем на 3%. При отклонении до 10% за этап выставляется 1 балл. При этом последующие этапы оцениваются в полной мере.

2 этап – 1 балл. Учет того, что часть сверхновых может быть пропущена из-за близости на небе к Солнцу. Доля сверхновых, которая будет при этом потеряна, может оцениваться от 0.2 до 0.4. При пропуске этого фактора этап не засчитывается, остальные оцениваются в полной мере.

3 этап – 2 балла. Определение разрешающей способности телескопа. Участники должны учесть два фактора – размер пикселя матрицы (обязательно) и дифракционный предел, который должен быть рассчитан, после чего можно сделать вывод, что он не является определяющим. Без проверки дифракционного фактора оценка за этап снижается на 1 балл. Точность определения – 10% по углу или 20% по угловой площади.

4 этап – 2 балла. Определение проницающей способности с учетом условия задачи. Точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 0.2^m.

5 этап – 2 балла. Определение максимального расстояния до сверхновой, чтобы она могла быть обнаружена. Абсолютная звездная величина сверхновой может при этом браться от -17^m до -20^m, что изменит ответ, но не влияет на оценку. Точность расстояния (с учетом того, что оно меняется в зависимости от звездной величины сверхновой) – 30%.

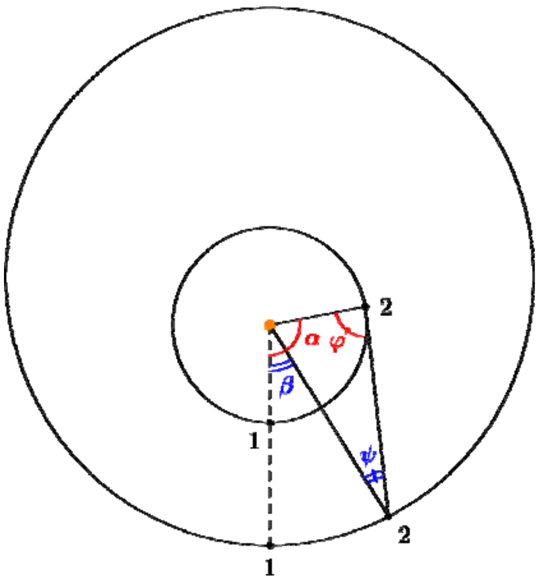
6 этап – 1 балл. Определение концентрации галактик.

11.1. «В ДАЛЕКОМ СОЗВЕЗДИИ ТАУ КИТА»

(А.В. Веселова)

Условие. В планетной системе около звезды τ Кита с массой 0.78 массы Солнца обращается несколько планет. Планета ***c*** обладает круговой орбитой радиуса 0.195 а.е., планета ***e*** движется в той же плоскости и в том же направлении по эллиптической орбите с большой полуосью 0.538 а.е. и эксцентриситетом 0.18. В некий момент времени произошло великое противостояние планеты ***e*** для наблюдателя на планете ***c***. Какой будет фаза планеты ***c*** при наблюдении с планеты ***e*** и фаза планеты ***e*** при наблюдении с планеты ***c*** спустя 10 дней после великого противостояния?

Решение. В момент великого противостояния обе планеты и центральная звезда находятся на одной прямой, при этом внешняя планета находится в перицентре. Планеты движутся с различными скоростями, как угловыми так и линейными, поэтому конфигурация меняется с течением времени. Определим положения планет спустя 10 дней.



Планета ***c*** движется по круговой орбите, период обращения находим по третьему закону Кеплера в системе единиц «масса Солнца – а.е. – год»:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M},$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{a_1^3}{M}} = \sqrt{\frac{0.195^3}{0.78}} = 0.0975 г = 35.6 \ сут.$$

Следовательно, за 10 суток внутренняя планета сдвинется на угол α, равный

$$\alpha = 360° \cdot 10/35.6 = 101°.$$

Внешняя планета находится на эллиптической орбите, поэтому для определения смещения понадобится решать уравнение Кеплера. Сначала определим период обращения внешней планеты:

$$T_2 = \sqrt{\frac{a_2^3}{M}} = \sqrt{\frac{0.538^3}{0.78}} = 0.447\,года = 163\,сут.$$

Следовательно, за 10 суток с момента прохождения перигелия средняя аномалия возрастет от нуля до величины

$$M = 360° \cdot 10/163 = 22°.$$

Нас интересует величина истинной аномалии, следовательно, сначала требуется решить уравнение Кеплера и определить эксцентрическую аномалию, а затем связать ее с истинной. Уравнение Кеплера имеет вид

$$E - e\,sinE = M\ ,$$

где все угловые величины выражены в радианах. После подстановки значений уравнение выглядит как

$$E - 0.18 sinE = 0.385.$$

Данное уравнение приходится решать численно; поскольку эксцентриситет сравнительно невелик, можно воспользоваться методом последовательных приближений:

$$E_0 = M,\ E_1 = M + e\,sinE_0, \ldots\ E_n = M + e\,sinE_{n-1}, \ldots$$

Итерации прекращаем в случае, когда модуль разности двух последовательных значений E будет меньше заданной точности. В нашем случае последовательность приближений будет выглядеть так: E_0 = 0.385, E_1 = 0.4526, E_2 = 0.4637, E_3 = 0.4655, E_4 = 0.4658. Здесь цепочку приближений можно завершить. Эксцентрическая аномалия составит E = 26.7°. Истинная аномалия связана с эксцентрической соотношением

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \mathrm{tg}\frac{E}{2},$$

$$v = 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \mathrm{tg}\frac{E}{2}\right) = 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+0.18}{1-0.18}} \cdot \mathrm{tg}\frac{26.7^o}{2}\right) = 31.8^o.$$

Таким образом, на нашем рисунке α = 101^o, $\beta \approx$ 32^o, разность углов составляет 69^o. Определим расстояние от центральной звезды до внешней планеты. Мы знаем истинную аномалию, тогда расстояние от звезды до планеты будет, согласно уравнению эллипса в полярных координатах, равно

$$r_2 = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\,cosv} = \frac{0.538(1-0.18^2)}{1+0.18\,cos32^o} = 0.452\,а.е.$$

Это расстояние незначительно больше перигелийного (0.441 а.е.). В треугольнике, образованном планетами и звездой спустя 10 дней после противостояния, мы знаем две стороны и угол между ними. Определим сначала расстояние между планетами по теореме косинусов:

$$r = \sqrt{a_1^2 + r_2^2 - 2a_1r_2cos(\alpha - \beta)} = 0.42\,а.е.$$

Далее, воспользовавшись теоремой синусов, определим заведомо острый угол ψ с вершиной в положении планеты ***e***:

$$\frac{sin(\alpha-\beta)}{r}=\frac{sin\psi}{a_1},$$

$$sin\psi = sin(\alpha-\beta)\cdot\frac{a_1}{r}=sin69^o\cdot\frac{0.195}{0.42}=0.43, \quad \psi=25.5^\circ.$$

Тогда фаза планеты ***e***, наблюдаемая с планеты ***c***, составит

$$\Phi_2=\frac{1+cos\psi}{2}=0.95.$$

Угол с вершиной в планете ***c***, равен φ = 180° – (α – β) – ψ = 85.5°, тогда фаза планеты *c*, наблюдаемая с планеты ***e***, составит

$$\Phi_1=\frac{1+cos\varphi}{2}=0.54.$$

Фаза примерно соответствует половине освещенной поверхности диска.

Примечание: орбита планеты *c* почти круговая, эксцентриситетом 0.03 мы пренебрегли, тем более, что ошибка его определения превышает саму оценку эксцентриситета. Более того, существование самой планеты не подтверждено надежно. Наклонение орбит также неизвестно – в условии описана система, лишь отчасти напоминающая реальную.

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Определение угла поворота планеты ***c*** за 10 дней с момента противостояния, точность 3°.

Возможная ошибка участника: неучет отличия массы звезды от массы Солнца. Первый этап не засчитывается, оценка снижается и за последующие этапы (см. далее).

2 этап – 3 балла. Определение истинной аномалии планеты ***e*** через 10 дней (средняя, эксцентрическая, истинная аномалия – по 1 баллу), точность 3°.

Возможная ошибка участника: вновь неучет отличия массы звезды от массы Солнца. Оценка снижается на 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.

3 этап – 1 балл. Определение расстояние планеты е от звезды через 10 дней, точность 0.005 а.е.

Возможная неточность: участник предполагает, что расстояние осталось равно расстоянию в перицентре. Данный 1 балл за этап не выставляется, но последующие этапы оцениваются в полной мере.

Возможная ошибка: участник игнорирует эллиптичность орбиты второй планеты и действует также, как с первой планетой (фактически, истинная аномалия приравнивается к средней, а расстояние в нужный момент – среднему или перицентрическому). Этапы 2 и 3 не засчитываются полностью.

4 этап – 2 балла (1+1). Определение угла ψ с вершиной в планете ***e*** и фазы планеты ***e***.

5 этап – 2 балла (1+1). Определение угла φ с вершиной в планете ***c*** и фазы планеты ***c***.

Требуемая точность выполнения 4 и 5 этапов составляет 3° по углу и 0.03 – по фазе, без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах. При наличии этих ошибок необходимо сделать пересчет фаз с их учетом и сравнивать ответы участника с этими значениями.

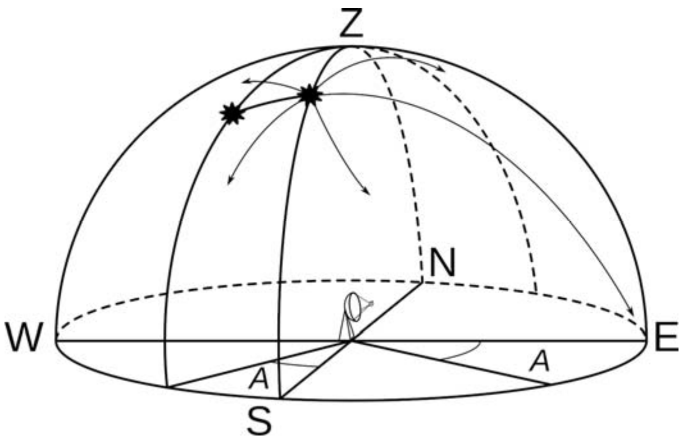
11.2. МЕТЕОРНОЕ ЭХО *(Е.Н. Фадеев)*

Условие. Радар, изучающий метеоры, фиксирует радиоэхо только тогда, когда направление от радара к метеору перпендикулярно ионизационному следу метеора. Радар, расположенный на широте +52°, направлен в точку востока. В $11^ч02^м$ местного времени 2 июля он начинает получать многочисленные сигналы от метеоров, проходящих через его луч. Радар поворачивают на 40° вдоль горизонта в сторону юга. В новом положении он начинает обнаруживать метеоры того же потока в $12^ч42^м$. Найдите экваториальные координаты (прямое восхождение и склонение) радианта этого метеорного потока. Уравнением времени пренебречь.

Решение. Когда радар направлен в точку востока, линия его обзора есть линия запад-восток. Метеоры могут быть перпендикулярны лучу радара в этом случае, если их радиант расположен в плоскости, перпендикулярной этому лучу, то есть на небесном меридиане. В день летнего солнцестояния, 21 июня, прямое восхождение Солнца равно $6^ч$. За 11 суток Солнце смещается на

$$\Delta\alpha = 360° \frac{11}{365.25} \approx 10.8° = 0.72ч.$$

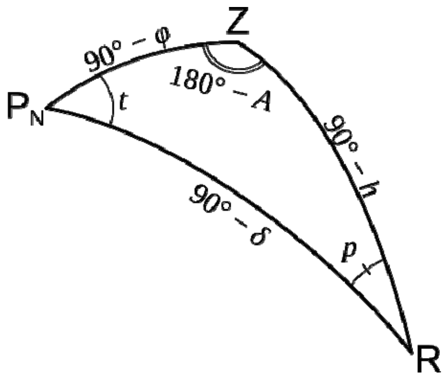
Следовательно, 2 июля в местный полдень в верхней кульминации находятся светила с прямым восхождением 6.72ч ≈ 6ч43м. За 58 минут до полудня в верхней кульминации были звёзды с прямым восхождением 6ч43м − 58м = 5ч45м. Это одно из возможных значений прямого восхождения радианта. Второе соответствует нижней кульминации, т. е. 17ч45м. Здесь мы не делали разницу между солнечным и звездным временем, поскольку за время ~ 1 часа эти шкалы расходятся всего на 10 секунд, что явно находится за пределами точности вычислений.



После того, как радар перенаправили в точку на горизонте, которая имеет азимут на 40° больший, чем точка востока, он будет фиксировать метеоры, чей радиант находится на вертикалах с астрономическими азимутами 40° или 220°.

Если в первый момент времени радиант находился в верхней кульминации (t = 0), то через 1ч40м он будет в западной полусфере неба, и для него возможен только вариант A = 40°. Если же радиант располагался в нижней кульминации над точкой севера, то во второй момент для него возможна только восточная полусфера и азимут 220°. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Мы можем построить параллактический треугольник, в котором нам известны часовой угол t = 1ч40м = 25° и азимут A = 40°, а также широта места наблюдения. Тогда с помощью сферической теоремы косинусов мы можем найти параллактический угол:



$$\cos p = -\cos t \cos(180° - A) + \sin t \sin(180° - A) \cos(90° - \varphi) =$$
$$= \cos t \cos A + \sin t \sin A \sin\varphi \approx 0.908.$$

Отсюда получаем $p \approx 24.7°$. Чтобы найти склонение радианта, можно воспользоваться теоремой синусов для сферического треугольника:

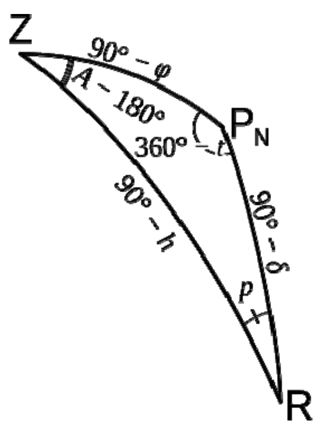
$$\frac{\sin(90° - \delta)}{\sin(180° - A)} = \frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\delta}{\sin A} = \frac{\cos\varphi}{\sin p} \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = \frac{\cos\varphi \sin A}{\sin p} \approx 0.946.$$

Тогда склонение равно $\delta_1 \approx \pm 18.9°$. На широте 52° над горизонтом поднимаются объекты со склонением вплоть до −38°, поэтому оба значения склонения возможны, и надо сделать выбор. Можно воспользоваться формулой пяти элементов:

$$\sin\delta = \frac{\cos t \sin A \sin\varphi - \sin t \cos A}{\sin p} \approx 0.324 \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 18.9°.$$

В данном случае склонение определяется однозначно, поскольку второе значение δ не попадает в область ±90°. В принципе, эту формулу можно было использовать сразу вместо теоремы синусов.

Еще один способ определения склонения заключается в применении сферической теоремы синусов для высоты радианта в верхней кульминации:



$$\frac{\sin(90°-h)}{\sin t}=\frac{\cos(90°-\varphi)}{\sin p} \quad \Rightarrow \quad \cos h=\frac{\sin t\cos\varphi}{\sin p}\approx 0.623 \quad \Rightarrow \quad h\approx \pm 51.5°.$$

Радиант не может находиться глубоко под горизонтом (фактически, это случай нижней кульминации радианта), так как в этом случае метеоры зафиксировать бы не удалось. Полученное значение высоты соответствует склонению радианта +18.9°.

Рассмотрим теперь случай нижней кульминации радианта с последующим проходом азимута A_1=220°. Рассуждая тем же образом с учетом величины часового угла t_1=205°, можно прийти к тем же значениям cos p и cos δ. Однако, формула пяти элементов даёт другое значение склонения:

$$\sin\delta=\frac{\sin t_1\,\cos A_1-\cos t_1\,\sin A_1\,\sin\varphi}{\sin p}\approx -0.324 \quad \Rightarrow \quad \delta\approx -18.9°.$$

Очевидно, что точка с таким склонением вблизи нижней кульминации находится очень глубоко под горизонтом, и метеоры такого потока в этот момент бы не наблюдались. К этому выводу можно было прийти и на основе вычисления высоты радианта над горизонтом:

$$\cos h_1=-\frac{\sin t_1\cos\varphi}{\sin p}\approx 0.623 \quad \Rightarrow \quad h_1\approx \pm 51.5°.$$

Положительная высота здесь невозможна, так как светило с южным склонением не может находиться так высоко в северной части неба.

Наконец, приведем простой приближенный способ, позволяющий определить склонение радианта с небольшой погрешностью, вообще не прибегая к формулам сферической тригонометрии. Предположим, что радиант в первый момент наблюдения находился в верхней кульминации, а потом он оказался на азимуте +40°, то есть его суточный путь проходил южнее зенита. До достижения часового угла t он пройдет дугу по небу, приближенно равную $t\cos\delta$. Радиант вблизи кульминации движется по небесной сфере практически горизонтально, поэтому эту же дугу можем считать примерно равной

$$t\cos\delta = A\cos h = A\cos\,(90^\circ-\varphi+\delta)=A\sin(\varphi-\delta)=A(\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta).$$

Отсюда мы получаем:

$$\delta = arctg\,\frac{A\sin\varphi - t}{A\cos\varphi}=+15^\circ.$$

Заметим, что мы сразу нашли не только величину склонения (с погрешностью около 4°), но сразу же и его знак. Аналогично, для случая нижней кульминации мы получим склонение около –15° и расположение под горизонтом.

Точные координаты радианта: α = 5ч45м, δ = +18.9°, они соответствуют известному летнему дневному метеорному потоку β-Тауриды, порожденному кометой Энке и имеющему возможную связь с Тунгусским явлением.

Система оценивания.

<u>1 этап – 1 балл.</u> Вывод о том, что радиант метеорного потока находится в плоскости, перпендикулярной направлению прихода эхо-сигнала. В частности, на небесном меридиане

в момент, когда радар направлен на восток, и на вертикалах 40° и 220° – во втором положении.

<u>2 этап – 3 балла.</u> Определение прямого восхождения радианта. Из них 1 балл выставляется за определение прямого восхождения Солнца в день наблюдения. По 1 баллу выставляется за каждый вариант значения прямого восхождения. Надо учесть, что момент летнего солнцестояния мы знаем с точностью до одних суток. Поэтому участник может получить значения прямого восхождения в пределах ±4 минуты, что не влияет на оценку.

<u>3 этап – 4 балла.</u> Определение склонения радианта для случая верхней кульминации, точность 2°. При правильном вычислении склонения выставляется 4 балла. В некоторых вариантах выкладок тригонометрические функции могут давать дополнительные решения, как показано выше. Если участники игнорируют эти дополнительные решения, то оценка снижается на 1 балл.

Поскольку часовой угол невелик, параллактический треугольник довольно узкий и может быть приближен плоским треугольником. Такие приближенные решения оцениваются в 2 балла при итоговой погрешности не более чем на 5° и в 1 балл при погрешности в пределах 8°. Также 2 баллами за этап оценивается приведенное выше решение, основанное на длине суточной дуги, где погрешность составляет 4°.

<u>3 этап – 2 балла.</u> Доказательство того, что для случая прямого восхождения 17ч45м решений нет. Здесь участник может по ошибке перепутать величины азимутов и часовых углов и прийти к формальному выводу, что радиант метеорного потока вообще не может быть в нижней кульминации, даже под горизонтом (например, высоты за пределами диапазона ± 90°). Такое решение оценивается 1 баллом.

11.3. ИНФРАКРАСНАЯ КАМЕРА *(А.М. Татарников)*

Условие. ИК-камера ASTRONIRCAM 2.5-м телескопа Кисловодской горной обсерватории ГАИШ МГУ не позволяет наблюдать в фильтре *J* звезды ярче 9.0^m из-за того, что при таком блеске поток фотонов за минимально возможное для камеры время накопления полностью заполняет ячейки детектора, и дальнейшая регистрация фотонов становится невозможной. Оцените аналогичную предельную звездную величину для фильтра *K*. Детектор камеры обладает практически постоянным квантовым выходом во всем рабочем интервале длин волн, охватывающем обе полосы. Считать, что фильтр *J* полностью пропускает излучение с длинами волн от 1.17 до 1.34 мкм, а фильтр *K* – от 2.04 до 2.35 мкм, не пропуская излучение вне этих интервалов. Учесть, что звездная величина звезды Вега (температура 10000 K) равна 0^m в обеих спектральных полосах.

Решение. При решении задачи нам необходимо учесть, что одна и та же звездная величина в разных спектральных полосах не означает равенство энергетических потоков или числа фотонов в этих спектральных интервалах. У разных полос может быть разный «нуль-пункт», то есть тот энергетический поток или поток фотонов, который соответствует нулевой звездной величине. Чтобы сравнивать звездные величины в разных полосах, мы используем «звезду-стандарт», у которой звездные величины в этих полосах одинаковые. Для стандартных фотометрических полос это звезда Вега, чья величина, как сказано в условии, равна 0^m в полосах J и K. Но Вега – это горячая звезда, и максимум ее излучения, согласно закону смещения Вина, приходится на УФ-диапазон:

$$\lambda_M = \frac{2900\ мкм}{T(K)} = 0.29\ мкм.$$

Таким образом, фильтры *J* и *K* попадают для Веги в диапазон длин волн, где можно применять закон Рэлея-Джинса. Он говорит о том, что поток энергии на единицу длины волны $F_\lambda \sim \lambda^{-4}$. Т.к. энергия одного фотона пропорциональна λ^{-1}, то поток фотонов в диапазоне Рэлея-Джинса $n_\lambda \sim \lambda^{-3}$.

Мы можем обратить внимание, что ширины полос $\Delta\lambda_{JK}$ (0.17 и 0.31 мкм соответственно) значительно меньше, чем центральные длины волн этих полос λ_J = 1.255 мкм и λ_K = 2.195 мкм. Используя этот факт, мы можем записать выражение для отношения интегральных потоков фотонов в полосах J и K для горячей звезды:

$$\frac{N_J}{N_K} = \left(\frac{\lambda_J}{\lambda_K}\right)^{-3} \frac{\Delta\lambda_J}{\Delta\lambda_K} \approx 2.9.$$

Если ячейке детектора для полного заполнения в фильтре *J* требуется собрать *N* фотонов, то при этом в фильтре *K* от этой же звезды (m_J = 9) накопится втрое меньше фотонов. Если эта звезда будет столь же горячей, как и Вега, то ее звездная величина во всех полосах, включая K, также составит 9^m. И для этой звезды в полосе K мы можем собрать до перенасыщения еще в три раза больше фотонов. Таким образом, предел насыщения в полосе K составит

$$m_K = 9.0 - 2.5 \lg 2.9 = 7.8.$$

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Обоснованное указание, что обе фотометрические полосы попадают для звезды Вега в диапазон Релея-Джинса. Участник может этого не делать, но при этом дальнейшие расчеты он должен выполнять с помощью общей формулы Планка. Если в дальнейшем участник сразу использует формулу Релея-Джинса, не обосновывая ее применимость – данный этап не засчитывается, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 3 балла. Восстановление правильной зависимости потока фотонов от длины волны в области применимости закона Релея-Джинса. Он может использоваться участником как известный, может выводиться. Этап засчитывается только в случае верного характера закона ($n_\lambda \sim \lambda^{-3}$) или корректного расчета по формуле Планка, если не оговорена применимость закона Релея-Джинса (см. выше). При ином характере (иной степени) все 3 балла не выставляются, последующие оцениваются в полной мере с учетом изменения итогового ответа.

3 этап – 2 балла. Вычисление отношения потоков фотонов от Веги в полосах J и K. При вычислениях участники должны воспользоваться полученной ранее зависимостью потока от длины волны (в том виде, в каком они его получили, даже если она ошибочная) и разницу ширин этих полос. Если хоть один из факторов не учитывается – данные 2 балла не выставляются. Требуемая точность итогового вычисления – 5%.

4 этап – 3 балла. Вычисление итоговой звездной величины в полосе K, точность 0.1^m.

Вероятная ошибка участника: путаница в звездных величинах и вывод, что предельная величина в полосе K будет слабее, чем в полосе J, и ответ около 10m. Оценка за 4 этап не выставляется (0 баллов).

11.4. ГОРЯЧАЯ ПЫЛЬ *(Е.Н. Фадеев)*

Условие. Измерения в ИК-диапазоне показали, что белый карлик окружает кольцо из темных пылинок с температурой не более 1500 K. Предполагается, что пылинки попадают в кольцо в результате приливного разрушения пролетающих мимо астероидов. Оцените внутренний и внешний радиусы кольца в километрах, если масса белого карлика 0.8 масс Солнца, радиус белого карлика 0.01 радиусов Солнца, его температура 20000 K, а плотность астероидов 1 г/см^3.

Решение. Пылинки, находящиеся на разном расстоянии имеют разную температуру: чем ближе к звезде, тем выше температура. Если максимальная температура пылинок 1500K, следовательно, при большей температуре пылинки испаряются. Отсюда можно оценить внутренний радиус кольца R_1. Из закона Стефана-Больцмана следует, что частица получает от звезды энергию

$$\frac{L_0}{4\pi R_1^2}\pi r^2 = \frac{4\pi R_0^2\sigma T_0^4}{4\pi R_1^2}\pi r^2 = \frac{\pi R_0^2\sigma T_0^4 r^2}{R_1^2}$$

Здесь L_0, R_0 и T_0 – светимость, радиус и температура звезды, r – радиус астероида. Всю эту энергию частица, нагретая до температуры T, должна излучать. Тогда

$$\frac{\pi R_0^2\sigma T_0^4 r^2}{R_1^2} = 4\pi r^2\sigma T^4,$$

$$R_1 = \frac{R_0}{2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \approx 90 R_{0.} \approx 630000\ км$$

Радиус внешней границы R_2 оценим из условия приливного распада. Пусть астероид сферически симметричный. Тогда на центр астероида действует сила притяжения звезды, создающая ускорение

$$w_0 = \frac{GM}{R_2^2}.$$

На ближайшем к звезде краю астероида это ускорение составит

$$w_1 = \frac{GM}{(R_2 - r)^2}.$$

Разность ускорений, действующих на ближнюю и центральную части астероида со стороны звезды, или приливное ускорение, есть

$$w_T = w_1 - w_0 = \frac{GM}{R_2^2}\left[\left(1 - \frac{r}{R_2}\right)^{-2} - 1\right] \approx \frac{GM}{R_2^2}\left(1 + 2\frac{r}{R_2} + 1\right) = \frac{2GMr}{R_2^3}$$

Здесь M – масса звезды, r – радиус астероида. От разрыва астероид удерживает собственная гравитация, ускорение которой равно

$$w_g = \frac{Gm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r.$$

Условием разрушения астероида является равенство приливного и гравитационного $w_T = w_g$. Отсюда

$$R_2 = \left(\frac{3M}{2\pi\rho}\right)^{1/3} \approx 910000\ км$$

Система оценивания.

<u>1 этап – 1 балл.</u> Вывод о том, что внутренняя граница кольца определяется предельной температурой нагрева пылинок.

<u>2 этап – 3 балла.</u> Запись формул, определяющих нагрев (1 балл) и остывание (1 балл) пылинок и вывод формулы для вычисления внутреннего радиуса кольца (1 балл).
Участники могут использовать формулу для температуры тела, нагреваемого звездой, например, в виде

$$T = \sqrt[4]{\frac{L_0(1-A)}{16\pi\sigma R_1^2}},$$

что не является ошибкой и должно оцениваться полным баллом. Также участники могут пытаться оценить альбедо пылинок. Альбедо в несколько процентов (до 5%) также не является ошибкой, большим его принимать нельзя, так как пылинки по условию задачи темные.

<u>3 этап – 1 балл.</u> Получение величины R_1. Засчитывается при правильно выполненных предыдущих пунктах и правильной размерности и единицах ответа.

<u>4 этап – 1 балл.</u> Вывод о том, что внешняя граница кольца определяется приливным распадом астероидов.

<u>5 этап – 3 балла.</u> Запись формул, определяющих приливное (1 балл) и гравитационное (1 балл) ускорения и вывод формулы для вычисления внутреннего радиуса кольца (1 балл).

Комментарий: следует заметить, что небольшие астероиды, форма которых далека от круговой, удерживаются от распада не собственной гравитацией (по крайней мере, не только ей), а такими же внутренними силами, которые препятствуют, например, разрушению стола. Участник может пытаться оценить силу, необходимую для разрыва астероида. Если оценка разумная, а ответ правдоподобный, то решение засчитывается в полном объеме.

<u>6 этап – 1 балл.</u> Получение величины R_2. Засчитывается при правильно выполненных предыдущих пунктах и правильной размерности и единицах ответа.

11.5. НЕРАЗУМНОЕ БЕГСТВО *(О.С. Угольников)*

Условие. Космический аппарат массой *m* обращается по круговой околосолнечной орбите с радиусом R_0. В один момент времени аппарат включает двигатель, создающий постоянную силу тяги, все время направленную от Солнца. При какой минимальной величине этой силы аппарат в итоге покинет Солнечную систему? Считать, что масса аппарата в результате работы двигателя не меняется, взаимодействием с другими телами Солнечной системы, кроме Солнца, и излучением пренебречь.

Решение. На первый взгляд, картина может напоминать движение аппарата с фотонным парусом, чья тяга направлена от Солнца и тем самым облегчает аппарату преодоление силы его притяжения F_G. Однако здесь есть важное физическое различие, в корне меняющее ход решения. В случае фотонного паруса сила светового давления, как и сила притяжения Солнца, убывает обратно пропорционально расстоянию от Солнца *R*. Это позволяет рассматривать движение аппарата в поле центрального тела с уменьшенной эффективной массой. В этом случае достаточно очевидно, что силе светового давления нужно достичь половины силы притяжения, и орбита из круговой превратится в параболическую.

В нашем же случае сила тяги двигателя *f* не зависит от расстояния до Солнца. Из этого можно сделать качественный вывод: при включении двигателя аппарат начнет удаляться от Солнца, сила его притяжения *F* будет убывать, а отношение сил *f*/*F* – расти. Таким образом, аппарат может улететь из Солнечной системы и при силе тяги *f*, меньшей $F_0/2$, где F_0 – притяжение Солнца на расстоянии R_0. Пока это лишь качественный вывод, который в дальнейшем подтвердится численно в ходе решения.

Сила *f* является центральной и потенциальной. Поэтому мы можем пользоваться законами сохранения момента импульса и энергии. Равнодействующая сила (мы считаем ее положительной, если она направлена от центра) составляет

$$F = f - F_G = f - \frac{GMm}{R^2}. \qquad (1)$$

Здесь *M* – масса Солнца. Потенциальная энергия аппарата на расстоянии *R* от Солнца есть

$$E_P = -f \cdot R - \frac{GMm}{R} + C. \qquad (2)$$

Здесь *C* – произвольная константа. Потенциальная энергия достигает максимума на расстоянии R_C, на котором сила *F* обращается в ноль:

$$R_C = \sqrt{\frac{GMm}{f}}. \qquad (3)$$

Очевидно, что при достижении этого расстояния аппарат будет далее вытолкнут из Солнечной системы работой своего двигателя. Казалось бы, нам достаточно посчитать полную энергию аппарата в момент включения двигателя, приравнять ее к потенциальной энергии на расстоянии R_C и тем самым получить выражение для силы *f*. Однако, этот подход не будет верным. В соответствии с законом сохранения момента импульса, аппарат будет иметь на этом расстоянии перпендикулярную компоненту скорости, а значит, еще и кинетическую энергию, которую также необходимо учесть в выражении для баланса полной энергии.

Итак, в соответствии с законом сохранения момента импульса, перпендикулярная компонента скорости на расстоянии R составит

$$v_T(R) = v_0 \frac{R_0}{R} = \frac{\sqrt{GMR_0}}{R}. \tag{4}$$

Полная скорость $v(R)$ будет не меньше $v_T(R)$. Из этого мы получаем выражение для минимальной полной энергии аппарата на расстоянии R:

$$E = E_P + \frac{mv_T^2(R)}{2} = -f \cdot R - \frac{GMm}{R} + \frac{GMmR_0}{2R^2} + C. \tag{5}$$

Запишем выражение для порогового расстояния R_E, для которого полная энергия окажется максимальной. Именно его нужно будет достичь аппарату, чтобы покинуть Солнечную систему. Для этого приравняем производную полной энергии по радиусу dE/dR нулю:

$$-f + \frac{GMm}{R_E^2} - \frac{GMmR_0}{R_E^3} = \frac{GMm}{R_E^3}(R_E - R_0) - f = 0. \tag{6}$$

Теперь нам нужно проверить, в каком случае аппарат сможет достичь расстояния R_E. Для этого приравняем величины полной энергии на расстояниях R_0 (включение двигателя) и R_E:

$$-f \cdot R_0 - \frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{2R_0} = -f \cdot R_E - \frac{GMm}{R_E} + \frac{GMmR_0}{2R_E^2}. \tag{7}$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} & f \cdot (R_E - R_0) + GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_0}\right) + \frac{GMm}{2R_0R_E^2}(R_E^2 - R_0^2) = 0; \\ & f \cdot (R_E - R_0) - \frac{GMm}{R_0R_E}(R_E - R_0) + \frac{GMm}{2R_0R_E^2}(R_E - R_0)(R_E + R_0) = 0; \\ & f - \frac{GMm}{R_0R_E} + \frac{GMm}{2R_0R_E^2}(R_E + R_0) = f - \frac{GMm}{2R_0R_E^2}(R_E - R_0) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая далее соотношение (6), имеем:

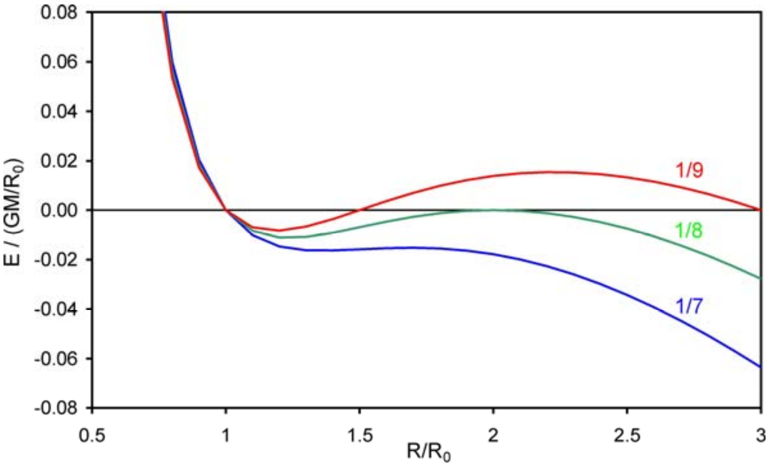
$$f = \frac{GMm}{R_E^3}(R_E - R_0) = \frac{GMm}{2R_0R_E^2}(R_E - R_0). \tag{9}$$

Оставляя вне рассмотрения тривиальное решение $R_E = R_0$, получаем простое выражение для R_E и силы f:

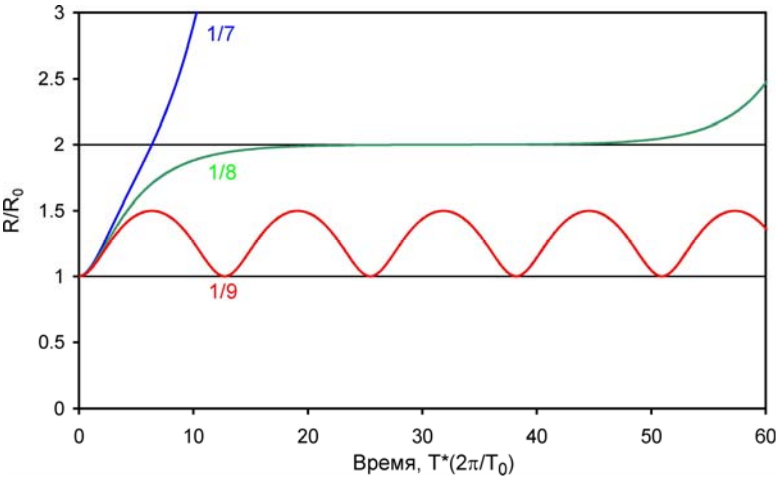
$$R_E = 2R_0; \quad f = \frac{GMm}{8R_0^2}. \tag{10}$$

Мы получили ответ на вопрос задачи. Для его наглядности приведем два графика. На первом показана зависимость полной энергии $E(R)$ в соответствии с формулой (5) для силы f, равной 1/9, 1/8 и 1/7 от силы притяжения Солнца на расстоянии R_0. Отметим, что выражение с коэффициентом 1/9 получается в случае неверного предположения о равенстве полной энергии на расстоянии R_0 и потенциальной энергии на расстоянии R_C, о котором мы говорили выше. За ноль энергии принято состояние аппарата в момент включения двигателя на расстоянии R_0.

Мы видим, что аппарат ни при каких условиях не может приблизиться к Солнцу, а при силе f, меньшей 1/8 от силы тяжести на расстоянии R_0, у него есть диапазон расстояний от R_0 до некоторого предела, где он может двигаться. «Лишняя» энергия при этом переходит в радиальное (по отношению к Солнцу) движение аппарата. При граничном значении 1/8 этот предел составляет $R_E = 2R_0$.



Второй график показывает зависимость расстояния аппарата от Солнца от времени для тех же трех случаев (здесь T_0 – орбитальный период аппарата на расстоянии R_0 с выключенным двигателем). При силе f, равной предельному значению (1/8 от силы тяжести на расстоянии R_0) аппарат в итоге оказывается на неустойчивой круговой орбите с радиусом R_E, с которой при малейшем возмущении он в итоге может покинуть Солнечную систему (что в итоге и произошло на графике вследствие конечной точности расчетов). Возможность оказаться на круговой орбите – это еще один критерий, по которому можно было решить задачу, определив выражение для силы f.



Остается лишь добавить очевидный факт: при более правильном использовании двигателя (тяга вдоль движения) аппарат через какое-то время мог бы покинуть Солнечную систему при сколь угодно малой величине тяги.

Система оценивания. Энергетический подход представляется наиболее простым и эффективным методом решения задачи, хотя нельзя исключать применения участниками и других методик. В этом случае необходима детальная проверка решения с выделением этапов, аналогичных по смыслу этапам приведенного выше решения. В случае энергетического подхода система оценивания следующая:

<u>1 этап – 2 балла.</u> Правильное выражение для потенциальной энергии в поле действия притяжения Солнца и тяги двигателя, формула (2) в решении. Константа C в ней может быть принята любой, в том числе и нулевой, и в этом случае не записываться. Участник может записать выражение для потенциальной энергии в непосредственном виде, оно может вытекать из его расчетов. Этап засчитывается только в случае правильной записи обоих слагаемых формулы (2), в том числе их знаков, в противном случае этап не засчитывается (0 баллов). Обращаем внимание, что значение «критического» расстояния R_C в решении, формула (3), сделано для описания возможно неправильного хода решения и от участников не требуется.

<u>2 этап – 2 балла.</u> Применение закона сохранения момента импульса и выражение для перпендикулярной компоненты скорости в зависимости от расстояния до звезды, формула (4). Так же, формула может быть записана в чистом виде или содержаться в выкладках участника. Этап засчитывается только при правильном написании, включая коэффициенты.

<u>3 этап – 1 балл.</u> Запись выражения для минимальной полной энергии в зависимости от расстояния R (формула (5) или эквивалентное ей соотношение). Фактически, это объединение результатов, полученных на первых двух этапах решения.

<u>4 этап – 2 балла.</u> Формулировка условия экстремума полной энергии на расстоянии R_E, за которым аппарат улетит из Солнечной системы (формула (6)).

<u>5 этап – 3 балла.</u> Критерий энергетической достижимости предельного расстояния R_E (формула (7)), вычисление силы f из этого критерия.

В случае ошибок на первом или втором этапе они не засчитываются полностью. Последующие этапы могут быть засчитаны в случае их верного выполнения, если ошибки, сделанные на первых двух этапах не сделают их абсурдными. В частности, если они приводят к изменениям численных коэффициентов, но не нарушают логичность ответа, который должен находиться в интервале от $F_0/10$ до $F_0/2$, не включая граничных значений, то этапы 3 и 4 оцениваются, исходя из качества их выполнения, а этап 5 оценивается из максимума 2 баллов.

При ошибках на первых этапах, которые приводят к абсурдным ответам или их отсутствию, все последующие этапы не засчитываются.

Вероятное неверное решение участника: по аналогии со световым давлением, предполагается, что для вылета из Солнечной системы нужна сила f, равная половине силы тяжести на расстоянии R_0, то есть $f = GMm/2R_0^2$. Все решение оценивается не выше 1 балла.

Вероятное неверное решение участника: находится расстояние, на котором равнодействующая двух сил равна нулю (R_C, формула (3)). Фактически, вместо экстремума полной энергии берется экстремум только потенциальной энергии. Далее записывается энергетическое условие достижимости этого расстояния. Если это делается с учетом кинетической энергии, то в итоге получается выражение для силы $f = GMm/9R_0^2$. Расстояние R_C при этом равно $3R_0$. По первому рисунку мы можем понять суть сделанной ошибки. Действительно, при силе $f = GMm/9R_0^2$. полная энергия на расстоянии $3R_0$ сравнивается с полной энергией на старте (R_0). Но эта точка находится за максимумом кривой полной энергии и поэтому не может быть достигнута. В этом случае не засчитываются 3 и 4 этапы решения и снижается 1 балл за последний этап. При отсутствии иных ошибок за решение выставляется 6 баллов.

Участник может сделать еще одну ошибку, не учитывая существование скорости у аппарата на расстоянии R_C и тем самым не выполняя второй этап решения. Минимальная сила в этом случае составляет $F_0 \cdot (3 - 2\sqrt{2})/2 = 0.086\ F_0$, что явно меньше истинного значения. Общая оценка не более 4 баллов.

11.6. ВОЛЧЬЯ СВЕРХНОВАЯ *(В.Б. Игнатьев)*

Условие. В мае 1006 года наблюдатели на Земле зафиксировали сильнейшую вспышку звезды в точке неба, находящейся в современном созвездии Волка. По всей вероятности, это была Сверхновая типа Ia, самая яркая на Земле с начала новой эры. Ее видимая звездная величина в максимуме оценивается в -7.5^m. Расстояние до нее составляло 2.2 кпк.

Как известно, кривая блеска сверхновых звезд типа Ia после максимума определяется процессом распада никеля-56, образующегося при вспышке:

$$^{56}\mathrm{Ni} + e^- \rightarrow {}^{56}\mathrm{Co} + 1.75 \text{ МэВ (период полураспада 6.10 суток);}$$
$$^{56}\mathrm{Co} + e^- \rightarrow {}^{56}\mathrm{Fe} + 3.61 \text{ МэВ (период полураспада 77.12 суток).}$$

Исходя из этих данных, определите общую массу никеля-56, образовавшегося при вспышке сверхновой, и время после регистрации максимума, через которое звезда в небе Земли ослабла до 0^m. Сверхновая наблюдалась в стороне от Млечного пути, межзвездным поглощением света и болометрической поправкой сверхновой пренебречь.

Решение. Определим абсолютную звездную величину сверхновой звезды в максимуме блеска:

$$m_0 = -7.5 + 5 - 5 \lg (2200) \approx -19.$$

Из сравнения абсолютных величин сверхновой звезды и Солнца получаем светимость сверхновой в момент максимума: $4 \cdot 10^9$ светимостей Солнца или $1.6 \cdot 10^{36}$ Вт или 10^{55} эВ в секунду. В момент максимума мы можем считать, что кобальта-56 образовалось еще мало, и все свечение происходит за счет распада никеля-56 в ходе первой из приведенных в условии реакций. Количество частиц никеля-56 меняется со временем по экспоненциальному закону:

$$N_{Ni} = N_{Ni}^0 \cdot exp(-t \ln 2 / T_{Ni}),$$

где T_{Ni} – период полураспада никеля. Энерговыделение в реакции распада никеля будет зависеть от времени следующим образом:

$$J_{Ni} = -E_{Ni} \frac{dN_{Ni}}{dt} = \frac{N_{Ni}^0 E_{Ni} \ln 2}{T_{Ni}} exp(-t \ln 2 / T_{Ni}).$$

Здесь E_{Ni} – энергия, выделяющаяся при превращении одного ядра никеля в ядро кобальта. Мы знаем величину светимости сверхновой звезды в момент t=0, J^0_{Ni}. Отсюда находим количество ядер никеля-56 в максимуме блеска сверхновой звезды:

$$N_{Ni}^0 = \frac{J_{Ni}^0 T_{Ni}}{E_{Ni} \ln 2} = 4 \cdot 10^{54}.$$

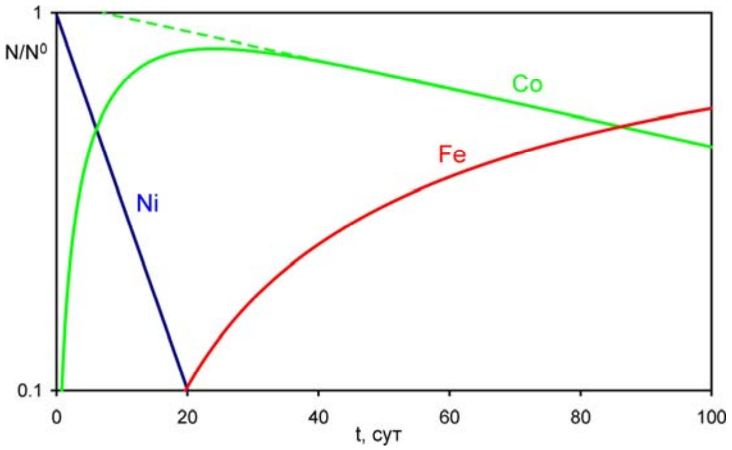
Полная масса никеля-56, образовавшегося при вспышке сверхновой:

$$M_{Ni} = \frac{N_{Ni}^0 \mu}{N_A} = 4 \cdot 10^{29} \text{ кг} = 0.2\, M_0.$$

Здесь μ – молярная масса данного изотопа никеля (она же – и кобальта, и железа, 0.056 кг/моль), N_A – постоянная Авогадро. Мы ответили на первый вопрос задачи. Чтобы ответить на второй вопрос, определим, во сколько раз должна ослабнуть сверхновая, чтобы ее видимый блеск на Земле стал равным 0^m:

$$k = 10^{-0.4 \cdot 7.5} = 0.001.$$

Количество никеля упадет в 1000 (~2^{10}) раз примерно через 10 периодов полураспада никеля, то есть через 61 день. Но в это время появится много кобальта, который распасться еще не успеет, и звезда будет еще достаточно яркой. Поэтому для ответа на второй вопрос задачи нам нужно учесть вторую реакцию приведенного в условии цикла.



В начале процесса кобальт-56 практически отсутствует, затем начинает быстро образовываться. Будем считать начальной эпохой распада кобальта момент, когда в него превратится половина всего никеля, то есть момент $t = T_{Ni}$. Точный анализ зависимости содержания кобальта от времени (рисунок, логарифмический масштаб по ординате) показывает, что это достаточно хорошее предположение. Тогда мы получаем выражение для светимости звезды в «позднюю» эпоху, когда никеля уже нет, и все энерговыделение обеспечивается распадом кобальта:

$$J_{Co} = -E_{Co}\frac{dN_{Co}}{dt} = \frac{N^0_{Co}E_{Co}\,ln2}{T_{Co}}exp(-(t-T_{Ni})ln2/T_{Co}).$$

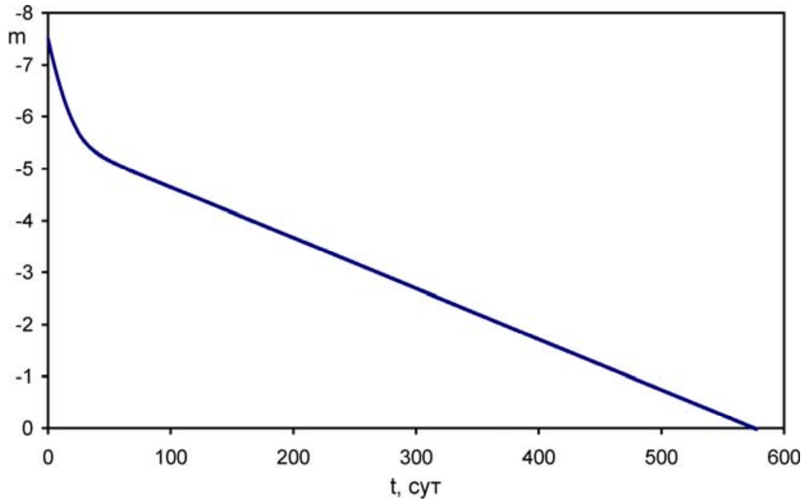
В ходе цикла реакций каждое ядро никеля превращается в ядро кобальта, поэтому стартовое содержание N^0 у никеля и кобальта одинаково. Запишем выражение для отношения светимости сверхновой в момент времени t и в максимуме (t=0):

$$\frac{J_{Co}}{J^0_{Ni}} = \frac{E_{Co}}{T_{Co}}\frac{T_{Ni}}{E_{Ni}}exp(-(t-T_{Ni})ln2/T_{Co}).$$

Приравнивая эту величину k, получаем:

$$t = T_{Ni} + \frac{T_{Co}}{ln2}ln\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E_{Co}}{T_{Co}}\cdot\frac{T_{Ni}}{E_{Ni}}\right) = 570\ сут = 1.55\ года.$$

В справедливости ответа можно убедиться по рисунку.



Система оценивания.

1 этап – 2 балла (1+1). Определение абсолютной звездной величины и светимости сверхновой звезды, точность 10%.

2 этап – 1 балл. Запись зависимости светимости звезды за счет распада никеля J_{Ni} как функции времени. Она может быть записана как известная либо выведена, как сделано в решении выше.

Вероятная ошибка участника: опускание одного или обоих факторов ln2 в этой формуле. Оценка за этап не выставляется, при этом 3-й этап оценивается в полной мере.

3 этап – 2 балла. Определение массы никеля в момент вспышки сверхновой, точность 20%.

4 этап – 2 балла. Запись зависимости светимости звезды за счет распада кобальта J_{Co} как функции времени. Сдвиг времени, при котором относительное содержание кобальта экстраполируется на единицу, может быть взято в интервале от нуля до T_{Ni}/ln2 (период уменьшения количества никеля в *e* раз). Участник олимпиады может указать, что это время мало и на конечный ответ не влияет, и тогда этап может быть засчитан полностью. Если же эффект запаздывания полностью игнорируется или временная задержка выходит за рамки этого интервала, оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника: опускание одного или обоих факторов ln2. Оценка за этап не выставляется, 5 этап оценивается в полной мере.

5 этап – 3 балла. Определение времени, через которое звезда в небе Земли ослабнет до 0^m, точность – 10 дней. При ошибке до 20 дней оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника на этапах 4-5: предположение, что сверхновая меняет яркость только за счет одной из двух реакций. В этом случае в качестве ответа получается примерно 10-кратный период полураспада соответствующего изотопа (60 дней для никеля и около 770 дней для кобальта). В этом случае 4 этап не засчитывается, за 5 этап ставится 1 балл.