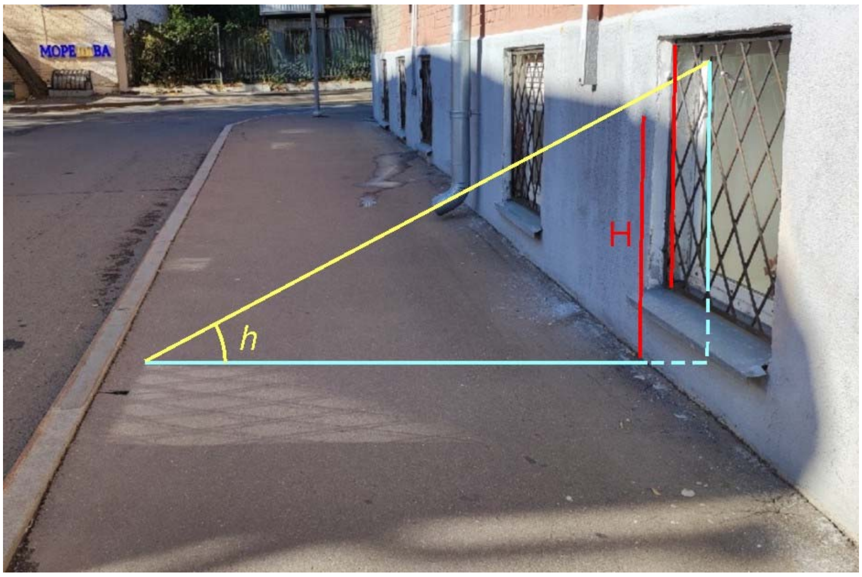
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2023 год
Второй (практический) тур

ПРАКТИЧЕСКИЙ ТУР
9.7. ОСЕННИЙ СОЛНЕЧНЫЙ ДЕНЬ *(А.А. Автаева)*

Условие. Перед вами фотография, сделанная 10 октября в Москве (φ = 55° с.ш., λ = 38° в.д.).
1) Оцените высоту Солнца в момент, когда делали фотографию.
2) Что вы можете сказать про момент съемки (по московскому времени)?
3) Оцените высоту здания на другой стороне улицы, которое отбрасывает тень, считая его крышу плоской.
4) Определите примерное направление улицы, проходящей межу зданиями.
Расстояние между этими зданиями – 14 м, вертикальный размер окна 1 м, оконное стекло расположено вертикально и вдоль улицы. Считайте, что в момент съемки лучи Солнца направлены перпендикулярно этой улице.

Решение. Вначале обратим внимание, что отражение решетки на земле раздваивается, так как решетка отбрасывает тень для прямого солнечного света, идущего к окну и для отраженного солнечного света от окна. Само окно расположено вертикально, и угол A равен высоте Солнца над горизонтом (см. рисунок далее). Край пятна отраженного света на земле формируется верхним краем участка стекла окна, не попадающего в тень рамы или козырька, что нужно учесть при построении, иначе мы можем получить ошибку до 4° в большую сторону. Отсюда мы получаем высоту Солнца над горизонтом: h = 28°.



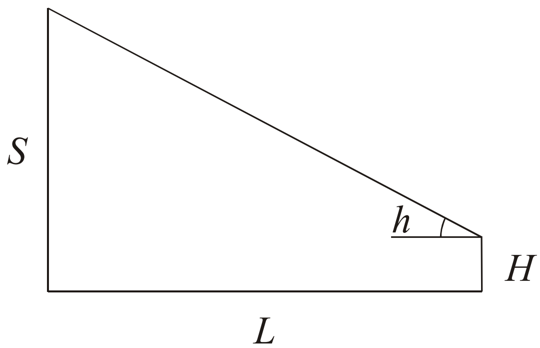
Мы видим, что фото было сделано 10 октября, что достаточно близко ко дню осеннего равноденствия, которое приходится обычно на 22-23 сентября. Мы можем считать видимый путь Солнца по эклиптике отрезком прямой линии, образующей с экватором угол $\varepsilon = 23.4°$. С 22 сентября по 10 октября прошло 18 дней, Солнце сместилось по эклиптике на угол около 18°, уходя к югу от небесного экватора. Тогда склонение Солнца равно:

$$\delta = -18° \sin \varepsilon = -7°.$$

Мы получили правильный ответ в рамках доступной точности, в реальности склонение Солнца в момент съемки составляло –6.7°. Отсюда можно заметить, что максимальная высота Солнца над горизонтом равна $h_{max} = 90° - \varphi + \delta = 28°$. С учетом погрешностей, такие как неровность пола, точность измерений, точность склонения, можно сказать, что высота Солнца примерно соответствует верхней кульминации. Это, правда, не дает нам возможности точно указать время съемки, так как вблизи кульминации высота Солнца в течение длительного времени примерно постоянна. Поэтому мы можем сказать, что фото сделано вблизи солнечного полудня (12ч30м по московскому времени), а улица ориентирована примерно с востока на запад.

Нам осталось определить высоту здания, отбрасывающего тень. По красным линиям на рисунке мы видим, что высота тени на здании H примерно равна вертикальному размеру окна: 1 м. В итоге, высота здания есть равна

$$S = H + L \operatorname{tg} h = 1\text{м} + 14\text{м} \cdot \operatorname{tg} 28° = 8.5\text{м}.$$



Система оценивания.

1 этап – 4 балла. Определение высоты Солнца над горизонтом в момент съемки, точность 2°. При большей ошибке снимается 1 балл за каждый 1° погрешности более 2°, оценка за этап при этом не может быть меньше нуля.

Вероятная ошибка участника: связь края светлого блика на дороге с верхним краем окна. Ошибка составляет 4°, и в этом случае оценка уменьшается на 2 балла.

2 этап – 2 балла. Определение склонения Солнца в день съемки, точность 1°. При большей ошибке снимается 1 балл за каждый 1° погрешности более 1°, оценка за этап при этом не может быть меньше нуля.

3 этап – 2 балла. Вычисление высоты Солнца в верхней кульминации 10 октября, точность 1°. При этом результат может отличаться от приведенного выше в решении, если этап 2 выполнен участником с погрешностью.

4 этап – 4 балла (2+2). Выводы о времени съемки и направлении улицы. Оба вывода следуют из того, что Солнце располагается вблизи верхней кульминации. При этом время и азимут улицы нельзя определить с высокой точностью, так как высота Солнца в это время меняется медленно. Поэтому, если результат отличается от солнечного полудня для времени и «запад-восток» для азимута и при этом представлен с чрезмерной точностью (1 минута для времени и 1° для азимута), то за оценка за этап не может быть выше 2 баллов (1+1). Если данное отличие вызвано ошибками на этом же этапе – он не засчитывается.

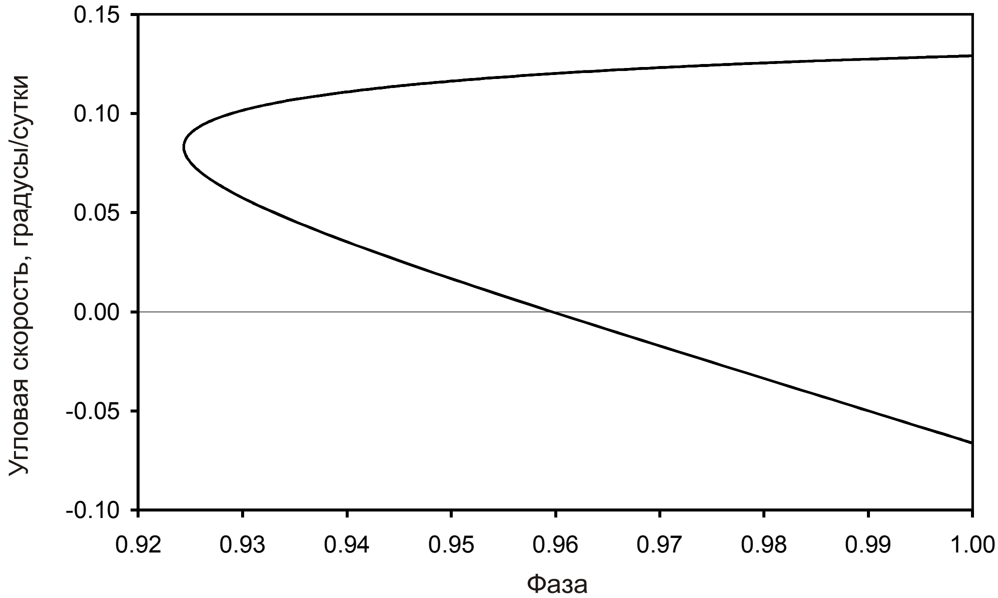
Возможный неверный ход решения: высота Солнца в момент съемки и/или высота Солнца в верхней кульминации вычисляются с ошибкой и в итоге значимо не совпадают друг с другом. В этом случае за этапы 1-3 снижаются баллы, исходя из итоговой погрешности. Если при этом измеренная высота окажется больше, то задача не должна иметь решения. Если участник при этом делает вывод, что причина в ошибках измерения и формулирует ответы для полудня – этап 4 засчитывается полностью. При формулировке «решения нет» оценка за 4 этап не превышает 2 баллов.

В случае, если измеренная высота Солнца оказывается меньше полуденной – участник должен произвести соответствующее определение времени и азимута, качество которого и определяет оценку за 4 этап.

5 этап – 3 балла. Определение высоты противоположного здания, точность 0.5м, при больших ошибках оценка уменьшается на 1 балл на каждые 0.5м дополнительной погрешности.

9.8. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА *(В.Б. Игнатьев)*

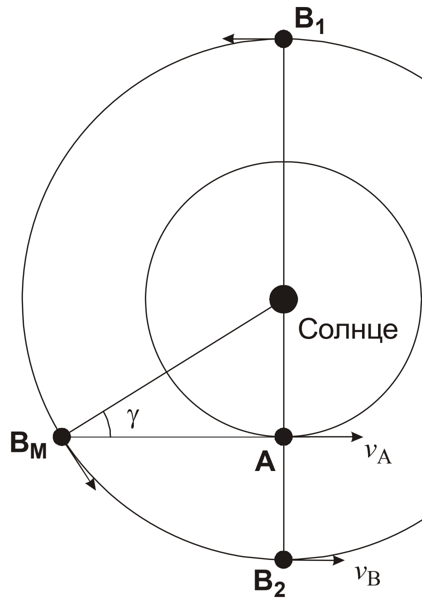
Условие. С некоторого объекта Солнечной системы **A**, двигающегося по круговой орбите, проводятся наблюдения другого объекта Солнечной системы **B**, также двигающегося по круговой орбите в той же плоскости. Перед Вами диаграмма «фаза – видимая угловая скорость» объекта **B** при наблюдении с объекта **A**. Положительный знак угловой скорости соответствует движению объекта **B** среди звезд в одном направлении с Солнцем, единица измерения угловой скорости – градусы за земные сутки. Оба объекта имеют сферическую форму, эффектами их атмосфер пренебречь. Определите радиусы орбит объектов **A** и **B**.



Решение. На диаграмме мы видим, что у объекта **B** существуют два разных положения, при котором его фаза равна единице. Из этого следует, что объект **B** является внешним по отношению к объекту **A**. В этих двух положениях объект **B** имеет угловую скорость, отличающуюся по знаку, то есть в одном случае объект движется среди звезд прямым движением, а в другом – попятным. При этом максимальная угловая скорость при прямом движении больше максимальной угловой скорости при попятном движении. Это указывает на то, что объекты вращаются вокруг Солнца в одном направлении.

В определенный момент фаза объекта **B** достигает минимума, равного $F_M = 0.924$. Минимум фазы означает максимум угла γ с вершиной в объекте **B**, образованного направлениями на Солнце и объект **A**. Этот же угол есть максимальная элонгация объекта А при наблюдении с объекта **B**. Нарисуем соответствующее положение объекта **B** на орбите. Фаза объекта **B** в этом случае равна

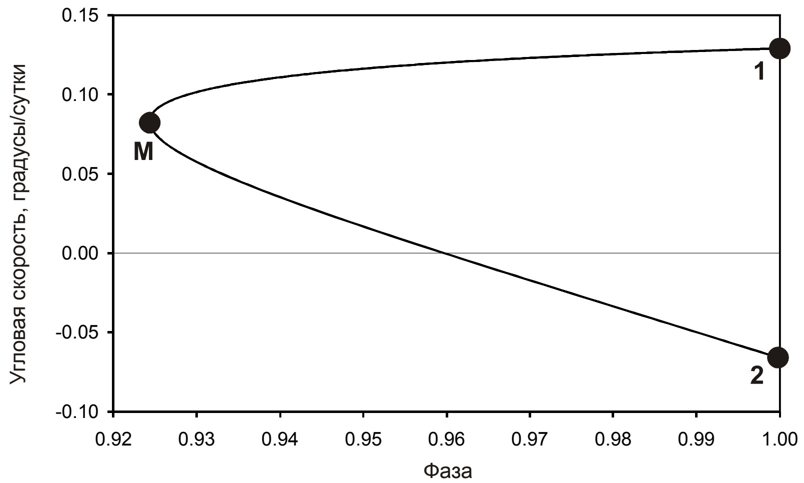
$$F_M = \frac{1+\cos\gamma}{2} = \frac{1+(\sqrt{r_B^2 - r_A^2}\,/\,r_B)}{2} = \frac{r_B + \sqrt{r_B^2 - r_A^2}}{2r_B}.$$



Отсюда мы получаем

$$\frac{r_A}{r_B} = \sqrt{1-(2F_M-1)^2} = 0.530 \equiv K.$$

Обратимся теперь к данным об угловых скоростях. В момент наименьшей фазы объекта B его видимая угловая скорость направлена в ту же сторону, что и Солнце, и имеет положительный знак на графике. Она положительна и в момент **1**, соответствующий соединению планеты **B** с Солнцем при наблюдении с планеты **A**. Ее численное значение составляет +0.13°/сут, и она выражается через пространственные скорости как



$$\omega_1 = \frac{v_A + v_B}{r_A + r_B}.$$

По условию задачи, орбиты планет круговые, поэтому мы можем подставить сюда выражения для круговых скоростей:

$$\omega_1 = \sqrt{GM}\,\frac{r_A^{-1/2} + r_B^{-1/2}}{r_A + r_B}.$$

Далее имеем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_B^3}} \frac{K^{-1/2}+1}{K+1} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r_B}\right)^{3/2} \frac{K^{-1/2}+1}{K+1}.$$

Здесь M – масса Солнца, r_0 – радиус орбиты Земли, ω_0 – угловая скорость орбитального движения Земли (0.986°/сутки). Отсюда мы получаем значение радиуса орбиты объекта **B**:

$$\frac{r_B}{r_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot \frac{K^{-1/2}+1}{K+1}\right)^{2/3} = 5.2.$$

Радиус орбиты тела **B** равен 5.2 а.е., радиус орбиты тела **A** равен Kr_B = 2.75 а.е. Очевидно, проводились наблюдения Юпитера с астероида главного пояса.

К тому же выводу мы могли прийти на основе анализа отрицательной угловой скорости объекта **B** в противостоянии (положение **2**)

$$\omega_2 = \frac{v_B - v_A}{r_B - r_A} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r_B}\right)^{3/2} \frac{K^{-1/2}-1}{K-1},$$

$$\frac{r_B}{r_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} \cdot \frac{K^{-1/2}-1}{K-1}\right)^{2/3} = 5.2.$$

или в момент квадратуры (положение **M**)

$$\omega_M = \frac{v_B \cos\gamma}{\sqrt{r_B^2 - r_A^2}} = \frac{v_B}{r_B} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r_B}\right)^{3/2},$$

$$\frac{r_B}{r_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_M}\right)^{2/3} = 5.2.$$

Последнее соотношение можно легко получить, учитывая, что в этот момент объект **A** находится в наибольшей элонгации при наблюдении с объекта **B**, то есть движется по небу с одинаковой угловой скоростью с Солнцем. А эта угловая скорость равна угловой скорости вращения объекта **B** по орбите. Получается, что мы могли полностью решить задачу, сняв с графика данные всего одной точки – **M**.

Система оценивания. При проверке решения жюри нужно обратить внимание, что оно может быть выполнено множеством способов. Выше предложен лишь один из них, причем и для него, как мы видим, радиус орбиты одного из объектов может быть определен по угловой скорости в одном из трех различных положений. Более того, участники могут вообще не принимать во внимание данные о фазе объекта **B** и найти радиусы орбит по данным об угловой скорости в двух положениях (**1** и **2**, либо **1** и **M**, либо **2** и **M**). Все эти способы предполагают определение из графика двух параметров – либо фазы и угловой скорости в точке **M**, либо угловой скорости в двух точках. Это определяет разделение решения на один вводный и два основных этапа, а также финальный вывод. При этом, сами этапы могут выглядеть по-разному. Далее приведено описание этапов при использовании способа решения, приведенного выше.

<u>1 этап – 1 балл.</u> Обоснование, что объекты движутся по орбитам в одном направлении. Он может быть сделан на основе модулей прямой и попятной угловой скорости в моменты, когда фаза обращается в единицу. Участник может не делать этот вывод, но тогда ему

необходимо рассматривать случай противоположных направлений вращения по ходу дальнейшего решения, доказывая, что его не может быть в данных условиях. Если участник сразу рассматривает только сонаправленное вращение двух тел, не обосновывая такой выбор – данный 1 балл не выставляется, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 5 баллов. Определение соотношения радиусов орбит двух орбит r_A/r_B. Если это делается на основе данных о фазе, должна быть использована абсцисса точки **M**. Требуемая точность высокая (0.005), так как данное соотношение очень плавно зависит от измеренного значения фазы, и даже если взять фазу, равную 0.92 (край диаграммы), что заведомо неверно, то итоговая погрешность чуть превысит 0.01. Если участник определяет обратную величину r_A/r_B, равную 1.887, то требуемая точность составляет 0.01. При превышении погрешности оценка уменьшается на 1 балл за каждую кратность превышения сверх единицы. Участник может вообще не определять эту величину численно, а подставлять ее выражение в общем виде в дальнейшие вычисления. В этом случае оценка определяется правильностью выражения.

Вероятная ошибка участника: минимум фазы связывается с взаимным положением планет, при котором разница их орбитальных долгот равна 90°. Тогда соотношение радиусов орбит получается равным 0.625. Оценка за этап составляет 1 балл при условии верного вычисления, последующие этапы оцениваются в полной мере.

3 этап – 5 баллов. Построение выражения для радиуса орбиты одного из тел на основе данных об угловой скорости. Оценка определяется правильностью используемой формулы. При возникновении качественных недочетов (путаница в знаках и т.д.) оценка за весь этап не может превышать 1 балла.

4 этап – 4 балла (2 + 2). Вычисление радиусов орбит обоих тел, точность составляет 0.05 а.е. для тела **A** и 0.1 а.е. для тела **B**. Если погрешность не превышает двукратную от заданной, за соответствующий подэтап выставляется 1 балл.

10.7. ДЕНЬ ЗАЩИТНИКА ОТЕЧЕСТВА

(М.И. Волобуева)

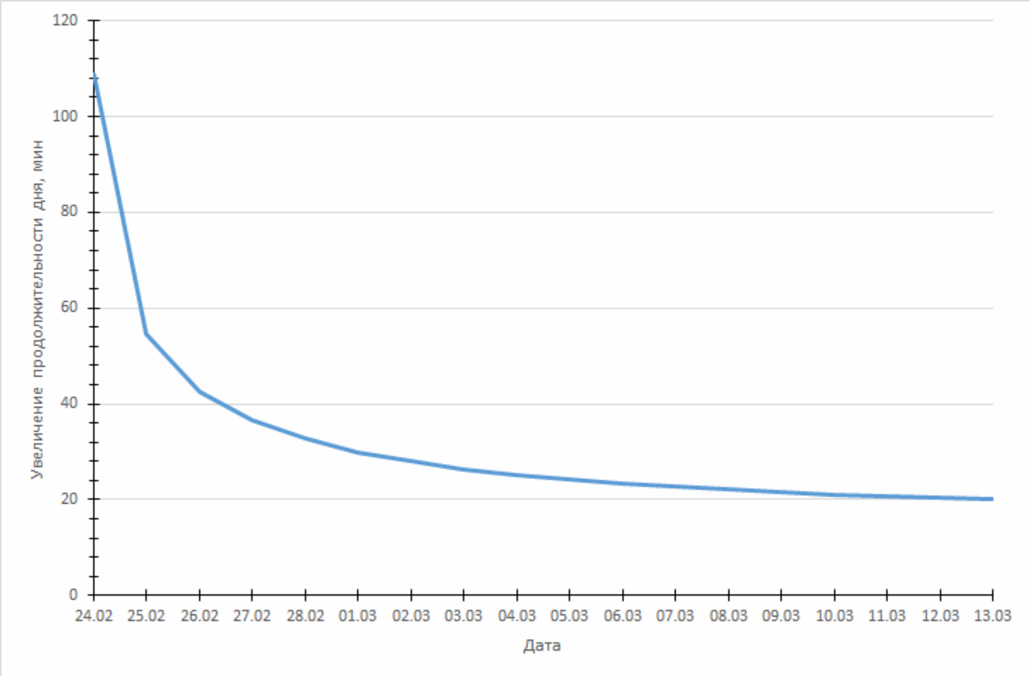
Условие. В таблице приведены значения продолжительности светового дня в некотором пункте наблюдения по сравнению с 23 февраля. Определите широту места наблюдения с точностью до 0.5°.

Дата	Продолжительность дня	Дата	Продолжительность дня
23 февраля	X	05 марта	X + 06:49:05
24 февраля	X + 01:48:56	06 марта	X + 07:12:27
25 февраля	X + 02:43:28	07 марта	X + 07:35:06
26 февраля	X + 03:26:07	08 марта	X + 07:57:09
27 февраля	X + 04:02:39	09 марта	X + 08:18:43
28 февраля	X + 04:35:20	10 марта	X + 08:39:52
01 марта	X + 05:05:19	11 марта	X + 09:00:38
02 марта	X + 05:33:17	12 марта	X + 09:21:07
03 марта	X + 05:59:44	13 марта	X + 09:41:21
04 марта	X + 06:24:54		

Решение. Проанализируем представленные данные. Определим, как изменялась продолжительность дня за сутки, то есть рассчитаем разницу между продолжительностью дня в выбранную дату и предыдущую. Результаты занесём в таблицу и построим график:

Дата	Изменение	Дата	Изменение
24 февраля	1:48:56	05 марта	0:24:11
25 февраля	0:54:32	06 марта	0:23:22
26 февраля	0:42:39	07 марта	0:22:39
27 февраля	0:36:32	08 марта	0:22:03
28 февраля	0:32:41	09 марта	0:21:34
01 марта	0:29:59	10 марта	0:21:09
02 марта	0:27:58	11 марта	0:20:46
03 марта	0:26:27	12 марта	0:20:29
04 марта	0:25:10	13 марта	0:20:14

На графике заметно очень резкое увеличение продолжительности дня в начале периода наблюдений. Уже на интуитивном уровне можно понять, что в эти дни пункт наблюдений прошел через границу полярной ночи и, скорее всего, 23 или 24 февраля был первым днем с солнечным светом. Действительно, если предположить, что хотя бы в один предыдущий день, 22 февраля, Солнце восходило над горизонтом, то по логике данных, разница долготы дня между 22 и 23 февраля должна быть не меньше 3 часов. Если принять это на веру, то уже 13 марта, за неделю до весеннего равноденствия, долгота дня должна превысить 12.5 часов, что выглядит странно. Вариант с восходом Солнца в этом пункте еще на день раньше, 21 февраля, можно сразу же исключить полностью. Таким образом, мы уже знаем время окончания полярной ночи в этом пункте с точностью до дня (23 февраля), что позволяет найти широту.



События происходят за 25 дней до весеннего равноденствия, и Солнцу осталось пройти по эклиптике дугу l около 24-25 градусов (будем считать ее равной 24.5°). Отсюда мы получаем его склонение 23 февраля:

$$\delta = -l \sin \varepsilon = -9.7°.$$

В это время Солнце становится видимым в пункте с широтой φ, то есть его высота в верхней кульминации становится больше, чем $h = -\rho - r = -51' = -0.85°$ (здесь ρ – рефракция у горизонта, r – видимый радиус Солнца). Отсюда

$$\varphi = 90° + \delta + \rho + r \approx 81.0°.$$

В реальности, данные относятся к пункту с широтой +80.8°, первый солнечный день там действительно наступил 23 февраля и продлился 25 минут.

Система оценивания.

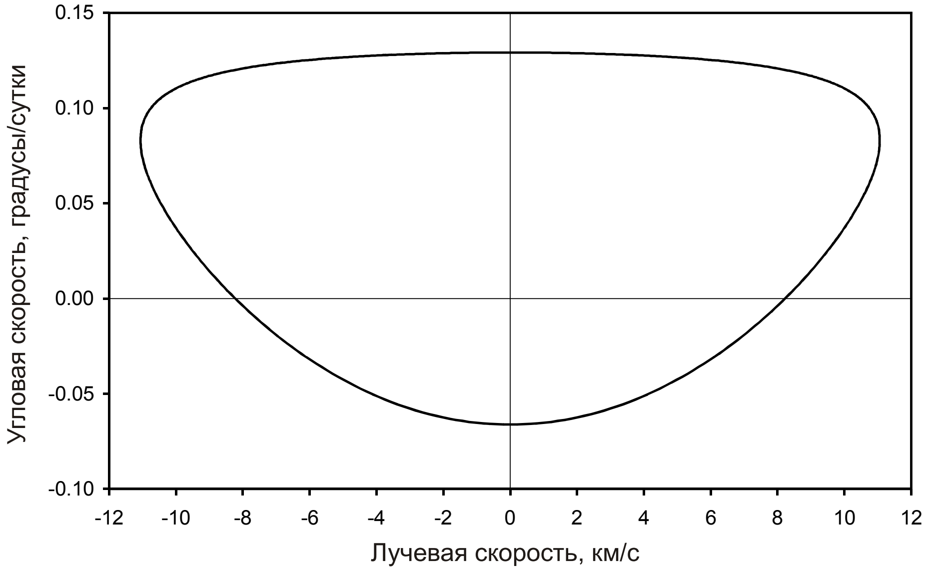
<u>1 этап – 6 баллов.</u> Вывод, что полярная ночь в данном пункте завершилась 23 февраля с точностью до одного дня. От участников достаточно качественного доказательства, хотя они могут использовать и более строгие выкладки.

<u>2 этап – 3 балла.</u> Определение склонения Солнца во время окончания полярной ночи, точность 0.5°. Участники могут определять склонения, считая его равномерно изменяющимся перед весенним равноденствием, а могут использовать и формулы сферической тригонометрии. При большей погрешности оценка уменьшается на 1 балл за каждые лишние 0.5°, но без влияния на следующий этап решения.

<u>3 этап – 6 баллов.</u> Определение широты места, точность 0.5°. При вычислениях обязателен учет атмосферной рефракции (без него оценка уменьшается на 2 балла). Фактор видимого радиуса Солнца можно не учитывать, если указать, что он незначителен для данного решения. При отсутствии указания на этот фактор оценка уменьшается на 1 балл.

10.8. СКОРОСТНАЯ ДИАГРАММА *(В.Б. Игнатьев)*

Условие. С некоторого объекта Солнечной системы **A**, двигающегося по круговой орбите, проводятся наблюдения другого объекта Солнечной системы **B**, также двигающегося по круговой орбите в той же плоскости. Перед Вами диаграмма «лучевая скорость – видимая угловая скорость» объекта **B** при наблюдении с объекта **A**. Положительный знак угловой скорости соответствует движению объекта **B** среди звезд в одном направлении с Солнцем, единица измерения угловой скорости – градусы за земные сутки. Оба объекта имеют сферическую форму, эффектами их атмосфер пренебречь. Определите радиусы орбит объектов **A** и **B**.

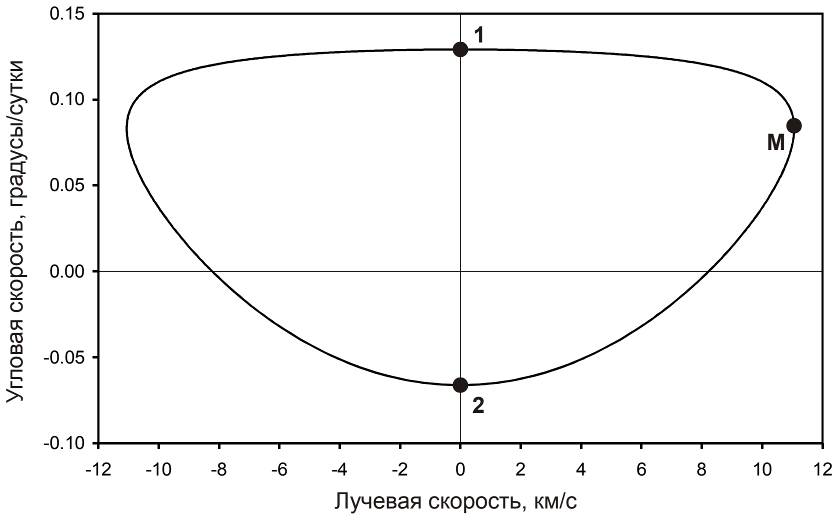


Решение. Вначале обратим внимание на один важный факт: угловая скорость объекта **A** при наблюдении с объекта **B** равна по величине и знаку угловой скорости объекта **B** при наблюдении с объекта **A** – это есть угловая скорость вращения линии, содержащей отрезок **AB**. То же самое можно сказать о лучевой скорости. Поэтому в задаче будет два решения, в которых объекты **A** и **B** меняются местами. Предположим для определенности, что объект **B** находится дальше от Солнца, чем объект **A**.

Еще один важный факт состоит в том, что в моменты, когда лучевая скорость равна нулю (1 и 2 на рисунке) – очевидно, что это моменты соединения или противостояния объектов с Солнцем – угловые скорости имеют разный знак. При этом угловая скорость прямого движения ω_1 по модулю больше, чем в случае попятного движения ω_2. Это может быть в том случае, если оба тела вращаются вокруг Солнца в одном направлении. Запишем выражения для этих угловых скоростей:

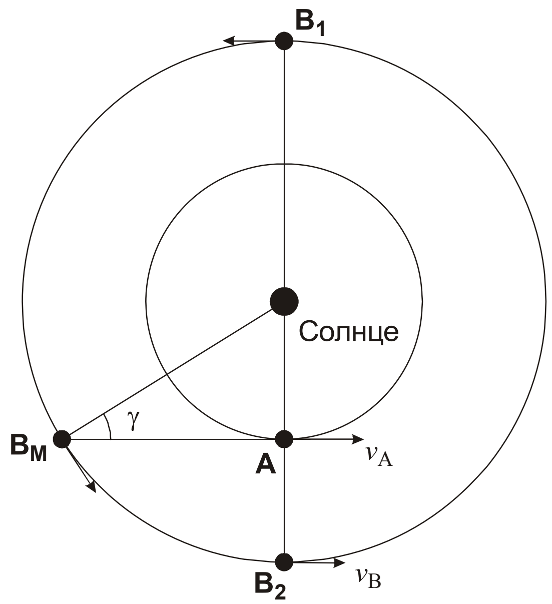
$$\omega_1 = \frac{v_B + v_A}{r_B + r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2}}{r_B + r_A},$$

$$\omega_2 = \frac{v_B - v_A}{r_B - r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2}}{r_B - r_A}.$$



Здесь M – масса Солнца, r_A и r_B – радиусы орбит тел, а v_A и v_B – их орбитальные скорости в инерциальной системе координат. Из графика имеем: ω_1 = 0.129°/сут, ω_2 = –0.066°/сут. Запишем выражение для отношения этих угловых скоростей (обратим внимание, что оно отрицательно):

$$K \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2}}{r_B + r_A} \cdot \frac{r_B - r_A}{r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2}} = \frac{r_B^{-1/2} r_A^{-1/2} (r_A^{1/2} + r_B^{1/2})}{r_B + r_A} \cdot \frac{r_B - r_A}{r_B^{-1/2} r_A^{-1/2} (r_A^{1/2} - r_B^{1/2})}.$$



Величина K составляет –1.95. Раскладывая множитель (r_B – r_A) как разность квадратов, имеем:

$$K = \frac{(r_A^{1/2} + r_B^{1/2})}{r_B + r_A} \cdot (r_A^{1/2} + r_B^{1/2}) = \frac{r_A + r_B + 2\sqrt{r_A r_B}}{r_A + r_B}.$$

Введем для простоты обозначение:

$$x = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$$

и заметим, что по нашему предположению $x > 1$. Тогда получаем

$$K = \frac{1 + x^2 + 2x}{1 + x^2}; \quad x^2(K-1) - 2x + (K-1) = 0.$$

В соответствии с нашим предположением, выбираем больший корень уравнения:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1-(K-1)^2}}{K-1} = 1.38.$$

Отметим, второй корень оказывается равен обратной величине от первого, отражая отмеченное нами свойство неизменности угловых скоростей при перестановке тел **A** и **B**.

Перейдем в систему отсчета, в которой объект **B** неподвижен, а объект **A** движется по орбите с постоянной угловой скоростью, соответствующей разности угловых скоростей орбитального вращения тел: $\Omega = \Omega_A - \Omega_B$. Очевидно, угловые скорости видимого движения тел в небе в этой системе отсчета будут другими, и мы не можем рассматривать их в прямом соответствии с заданной диаграммой. Но вот лучевые скорости останутся теми же.

Очевидно, что лучевая скорость v_R (мы не ставим здесь индекс A или B в соответствии со сказанным выше) будет максимальна по модулю, если в этой системе отсчета тело **A** движется точно к телу **B** или точно от него, то есть находится в наибольшей элонгации. Запишем выражение для максимальной лучевой скорости:

$$v_R = \Omega \cdot r_A = r_A\left(\sqrt{\frac{GM}{r_A^3}} - \sqrt{\frac{GM}{r_B^3}}\right) = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right).$$

Величину v_R мы можем определить из графика, она равна 11 км/с (точное значение – 11.05 км/с). Отсюда мы определяем значения радиусов орбит тел:

$$r_A = \frac{GM}{v_R^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^2 = r_0 \frac{v_0^2}{v_R^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^2 = 2.75\ a.e.; \quad r_B = r_A x^2 = 5.2\, a.e.$$

Здесь v_0 – орбитальная скорость Земли, r_0 – радиус орбиты Земли (астрономическая единица). Очевидно, проводились наблюдения Юпитера с астероида главного пояса.

Выше приведен один из способов решения. Существуют и другие, которые объединяются одним общим свойством: из графика мы получаем два независимых параметра, которые в итоге дают нам систему уравнений для определения двух неизвестных r_A и r_B. Один из них связан со следующим свойством: в момент максимума модуля лучевой скорости v_R объект с меньшим радиусом орбиты (в соответствии со сделанным выше предположением, пусть это будет **A**) находится в небе объекта **B** в наибольшей элонгации. В это время объект A сохраняет постоянное угловое расстояние от Солнца, а так как движение обоих тел происходит по круговым орбитам в одной плоскости, то угловая скорость объекта **A** в небе объекта **B**, она же – угловая скорость объекта **A** в небе объекта **B**, равна угловой скорости Солнца в небе объекта **B**:

$$\omega_E = \Omega_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B^3}} = \Omega_0 \sqrt{\frac{r_0^3}{r_B^3}} = 0.083^\circ / cym.$$

Здесь Ω_0 – орбитальная угловая скорость Земли (0.986°/сут). Отсюда мы сразу получаем радиус орбиты внешнего тела:

$$r_B = r_0 \cdot \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_B}\right)^{2/3} = 5.2 \text{ а.е.}$$

Далее мы можем воспользоваться данными о величинах угловой скорости в соединении и противостоянии объекта **B** при наблюдении с объекта **A**. Как уже было отмечено выше, они равны

$$\omega_1 = \frac{v_B + v_A}{r_B + r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2}}{r_B + r_A},$$

$$\omega_2 = \frac{v_B - v_A}{r_B - r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2}}{r_B - r_A}.$$

Перемножим их друг на друга:

$$\omega_1\omega_2 = GM\,\frac{(r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2})\cdot(r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2})}{(r_B + r_A)\cdot(r_B - r_A)} = GM\,\frac{r_B^{-1} - r_A^{-1}}{r_B^2 - r_A^2} = -\frac{GM}{r_A r_B (r_A + r_B)} \equiv Q.$$

Эта величина нам известна ($-8.51\cdot10^{-3}$ °^{2}/сут^2). Нам остается найти r_A. Для этого запишем последнюю формулу в виде квадратного уравнения относительно этой величины:

$$r_A^2 r_B + r_A r_B^2 + \frac{GM}{Q} = 0.$$

Решая его, мы выбираем положительный корень r_A:

$$r_A = \frac{-r_B^2 + \sqrt{r_B^4 - 4GM\,r_B/Q}}{2r_B} = 2.75 \text{ а.е.}$$

Система оценивания. Выше приведен один из способов решения задания, представляющийся наиболее простым. Участники могут использовать другие способы, которые могут быть сопряжены со сложными математическими выкладками, тем не менее необходимо четко проверять их корректность. Вне зависимости от способа, для решения и определения двух неизвестных величин (r_A и r_B) с графика необходимо снять два параметра. При способе, описанном выше, это отношение угловых скоростей в соединении и противостоянии (K) и максимальный модуль угловой скорости (v_R). Возможно использование величин угловых скоростей ω_1 и ω_2 по отдельности, и тогда ответ можно получить, даже не привлекая данных о лучевых скоростях. При использовании пути решения, описанного выше, система оценивания следующая:

<u>1 этап – 1 балл.</u> Обоснование, что объекты движутся по орбитам в одном направлении. Он может быть сделан на основе модулей прямой и попятной угловой скорости в моменты, когда лучевая скорость обращается в ноль. Участник может не делать этот вывод, но тогда ему необходимо рассматривать случай противоположных направлений вращения по ходу дальнейшего решения, доказывая, что его не может быть в данных условиях. Если участник сразу рассматривает только сонаправленное вращение двух тел, не обосновывая такой выбор – данный 1 балл не выставляется, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 5 баллов. Определение и анализ отношения угловых скоростей в соединении и противостоянии. Этап предполагает правильное экспериментальное определение этой величины. Максимальная погрешность 0.05, диапазон правильных значений, при котором возможно дальнейшее решение данным способом: от –1.9 до –2.0. Это оценивается в 2 балла.

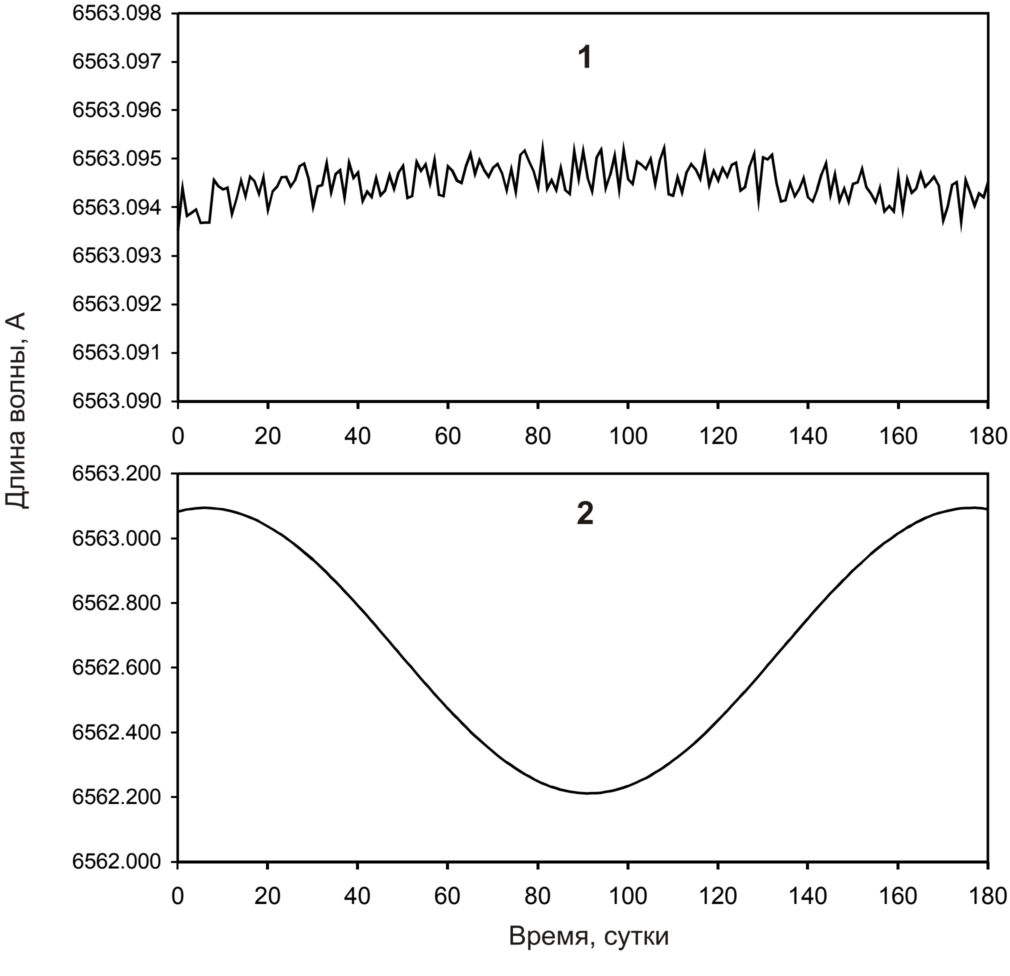
При погрешностях до 0.15 выставляется 1 балл). При вычислении обратной величины максимальная погрешность составляет 0.02, при погрешности до 0.05 выставляется 1 балл). Кроме этого, участник должен правильно связать эту величину с радиусами орбит и их отношением (3 балла).

3 этап – 5 баллов. Аналогично предыдущему этапу, должен быть правильно измерен другой наблюдательный параметр (2 балла). В случае максимальной лучевой скорости допустимая погрешность составляет 0.2 км/с (1 балл при погрешности до 0.4 км/с). Далее должна быть восстановлена верная связь этого параметра с искомыми величинами (3 балла).

4 этап – 4 балла (2+2). Определение радиусов орбит обоих тел. Максимальная погрешность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 0.1 а.е. для ближнего и 0.2 а.е. для дальнего тела. Если решение велось способом, описанным выше (первым), то на оценку за этот этап не влияет погрешность определения величины K, если она оказалась близка к –2.

11.7. ДВОЙНАЯ ЛИНИЯ *(О.С. Угольников)*

Условие. С помощью спектрографа высокого разрешения производятся наблюдения некоторой гравитационно-связанной звездной системы. Оказалось, что линия поглощения водорода Hα в ее спектре состоит из двух одинаковых по форме и глубине компонент. Зависимость центральной длины волны этих компонент от времени приведена на рисунках. Длины волн приведены к барицентру Солнечной системы (эффект движения наблюдателя в Солнечной системе вычтен). Известно, что система состоит из сферических компонент, массы которых строго одинаковы, а орбиты круговые. Лучевая скорость центра масс системы относительно барицентра Солнечной системы постоянна. Исходя из этого, определите минимально возможную полную массу системы. Что вы можете сказать о входящих в нее звездах? Поверхность каждой звезды однородна, осевым вращением, пятнами, потемнением к краю звезд пренебречь.

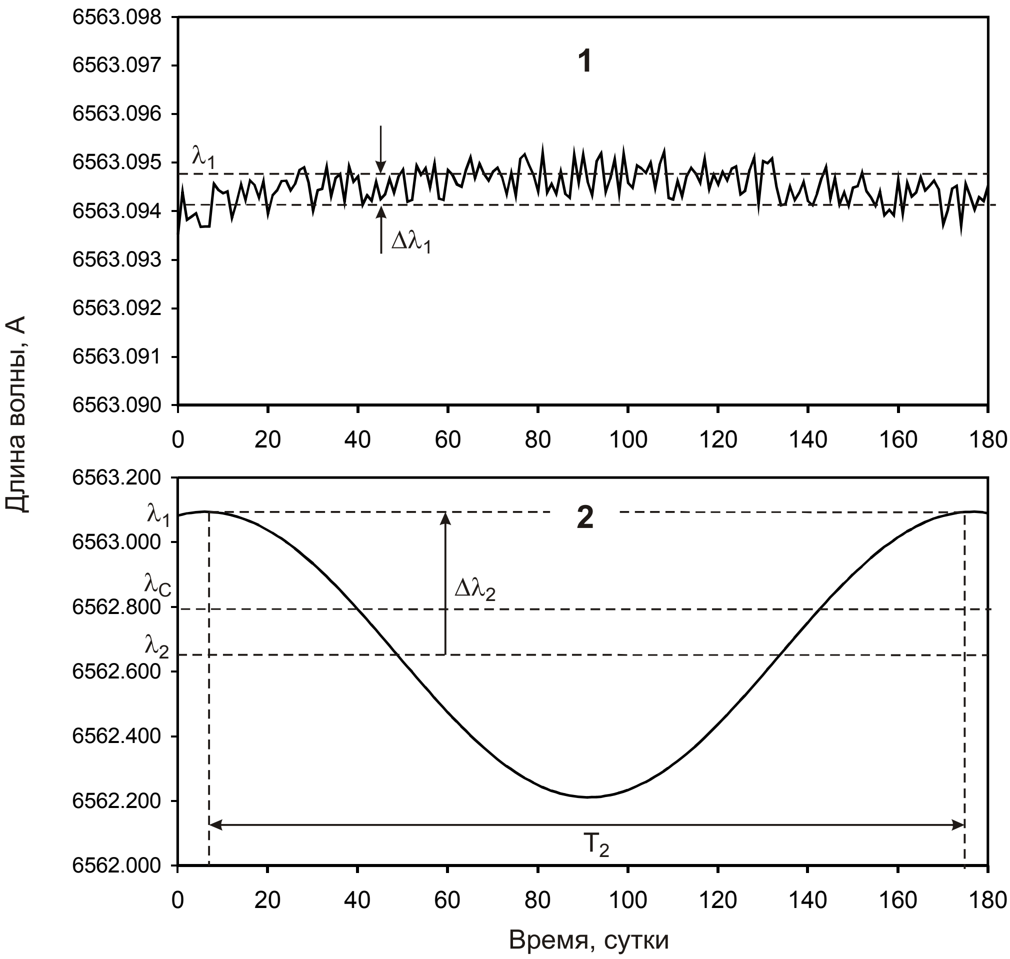


Решение. С первого поверхностного взгляда может показаться, что система состоит из двух одинаковых звезд, которые каким-то образом двигаются вокруг общего центра масс. Однако такая простая картина сразу вступает в противоречие с наблюдательными фактами. Длина волны первой линии в течение 180 дней наблюдений меняется крайне слабо, примерно на 0.001 А, то есть лучевая скорость этой звезды практически постоянна. А вот вторая звезда успевает ее существенно изменить, более того, проходит целый цикл ее колебания в пределах порядка 1А, то есть в 1000 раз сильнее, чем изменения длины волны первой компоненты.

По условию задачи, все компоненты, входящие в эту систему, имеют равные массы. Получается, что центр масс системы только из данных двух звезд за время наблюдений успел заметно изменить лучевую скорость относительно наблюдателя, что противоречит условию задачи. Таким образом, двумя звездами, создающими линии Hα в спектре, система не исчерпывается.

Действительно, изменение длины волны звезды 2 можно интерпретировать как ее вращение вокруг общего центра масс с еще одним телом, которое по каким-то причинам либо не излучает свет, либо не содержит линию Hα в своем спектре. По условию задачи, масса этого тела m такая же, как и у звезд 1 и 2. На графике мы видим, что во временной диапазон наблюдений попали два максимума и минимум длины волны, период T_2 составляет около 170 суток или 0.465 года. Амплитуда изменения длины волны по отношению к среднему значению $\Delta\lambda_2$ составляет около 0.44А. Отсюда мы находим амплитуду лучевой скорости звезды 2 и ее компаньона (назовем его звездой 3) с такой же массой:

$$v_{L2} = c\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} = 20\ км/с.$$



Мы не знаем, как ориентирована орбита системы 2-3 относительно наблюдателя. Обозначим угол между ее плоскостью и лучом зрения как i_2. Тогда полная скорость каждой из компонент есть $v_2 = v_{L2} / \cos i_2$. Звезды 2 и 3 с массой M каждая движутся по одинаковой круговой орбите на расстоянии a_2 друг от друга, радиус их орбит есть $a_2/2$. Таким образом,

$$\frac{GM^2}{a_2^2} = \frac{2Mv_{L2}^2}{a_2 \cos^2 i_2}; \quad \frac{v_{L2}T}{\cos i_2} = \pi a_2.$$

Отсюда мы получаем

$$M = \frac{2v_{L2}^3 T_2}{\pi G \cos^3 i_2} = \frac{1.1 \cdot 10^{30}\ кг}{\cos^3 i_2}.$$

Это же выражение можно получить из III закона Кеплера, только нужно обратить внимание, что v_{L2} – это лучевая скорость одной компоненты, а не разница скоростей двух компонент (при подстановке $a_2 = v_L T/2\pi$ мы получим ошибку сразу в 8 раз!). Минимально возможная масса каждой из звезд 2 и 3 составляет чуть более половины массы Солнца, тогда суммарная масса этой двойной системы составила бы 1.1 масс Солнца. Минимальное расстояние между компонентами 2 и 3 (a_2) составляет примерно 0.6 а.е.

Но мы не должны забывать, что в системе есть еще по крайней мере одна компонента, звезда 1, с такой же массой, как у компонент 2 и 3. По оптическим свойствам она, по-видимому, похожа на звезду 2. Более того, предположение, что она тоже имеет массу 0.55 масс Солнца, а суммарная масса равна 1.65 масс Солнца, тоже противоречит наблюдениям. Обратим внимание, что длина волны линии Hα в спектре звезды 1 совпадает с максимальной длиной волны этой линии в спектре звезды 2, когда последняя движется от наблюдателя в ходе вращения в системе со звездой 3. Иными словами, звезда 1 имеет значительную скорость по отношению к центру масс системы 2-3.

По условию задачи, система гравитационно связана, орбиты в ней круговые, а все тела имеют одинаковую массу. Лучевая скорость звезды 1 относительно центра масс системы 2-3 по величине совпадает с амплитудой лучевой скорости звезды 2 – 20 км/с. Скорость звезды 1 меняется мало, и мы можем считать, что она не участвует в быстром вращении с еще какой-либо массивной звездой (вспомним, что мы должны оценить минимальную массу системы). Маломассивных тел в системе нет по условию задания. Поэтому будем далее рассматривать систему как тройную. Звезда 1 вдвое меньше по массе, чем система 2-3. Поэтому длина волны, соответствующая лучевой скорости центра масс всей тройной системы, есть:

$$\lambda_C = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3} = \lambda_1 - \frac{2\Delta\lambda_2}{3}.$$

Длина волны линии в спектре звезды 1 должна совершать синусоидальные колебания относительно λ_C. Мы видим лишь их малый участок, что связано с большим периодом T_1 обращения звезды 1 относительно центра масс системы. Оценить его могло быть затруднительно, но по счастью, в середину интервала попал максимум длины волны λ_1. На краях интервала (сдвиг времени $\pm T_2/2$) длина волны уменьшается на величину $\Delta\lambda_1$. Тогда справедливо соотношение:

$$\lambda_1 - \Delta\lambda_1 = \lambda_C + (\lambda_1 - \lambda_C)\cos\frac{2\pi \cdot T_2/2}{T_1};$$

$$\Delta\lambda_1 = (\lambda_1 - \lambda_C) \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi \cdot T_2}{T_1}\right) \approx \frac{2\Delta\lambda_2}{3} \cdot \frac{\pi^2 T_2^2}{2T_1^2}.$$

Величина $\Delta\lambda_1$ очень мала. Ее приближенная оценка по графику дает 0.0007 А. Отсюда мы получаем оценку орбитального периода звезды 1:

$$T_1 = \pi T_2 \sqrt{\frac{\Delta\lambda_2}{3\Delta\lambda_1}} \approx 20 \text{ лет.}$$

Амплитуда изменения лучевой скорости звезды 1 есть:

$$v_{L1} = c\frac{2\Delta\lambda_2}{3\lambda_C} = \frac{2v_{L2}}{3}.$$

Аналогично действиям выше, описываем движение звезды 1 с массой M, удаленной от системы звезд 2-3 с суммарной массой $2M$ на расстояние a_1. Учитываем, что сама звезда 1 движется по кругу радиусом $2a_1/3$:

$$\frac{2GM^2}{a_1^2} = \frac{3Mv_{L1}^2}{2a_1 \cos^2 i_1}; \quad \frac{v_{L1}T_1}{\cos i_1} = \frac{4\pi a_1}{3}.$$

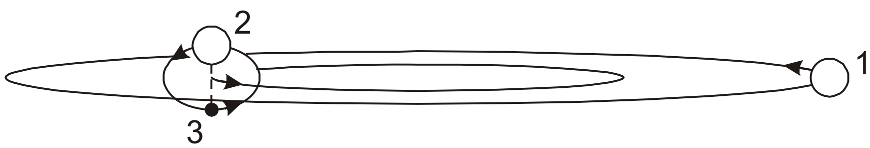
Здесь i_1 – угол между лучом зрения и плоскостью орбиты звезды 1. Отсюда получаем оценку для массы компоненты:

$$M = \frac{9v_{L1}^3 T_1}{16\pi G \cos^3 i_1} = \frac{v_{L2}^3 T_1}{6\pi G \cos^3 i_1} = \frac{4\cdot 10^{30} \text{ кг}}{\cos^3 i_1}.$$

В итоге, даже при орбитах, расположенных на луче зрения, масса одной компоненты не меньше 2 масс Солнца. Это более сильное ограничение, чем мы получили при анализе движения системы 2-3. Очевидно, что угол наклона этой системы i_2 к лучу зрения значителен:

$$i_2 \geq \arccos\left(\frac{1}{4}^{1/3}\right) = 50^\circ.$$

Оговоримся, что оценка этого угла не входит в задание. Тем не менее, она позволяет правильно понять конфигурацию этой системы (рисунок) для случая минимальной общей массы, которая, таким образом, составляет 6 масс Солнца. Добавим также, что расстояние между звездами 2 и 3 при таком наклоне составляет около 1 а.е.



Нам осталось понять, что за звезды входят в систему. Две звезды с массой 2 массы Солнца и линией Hα в спектре – скорее всего, звезды главной последовательности класса A типа Веги. У таких звезд линии бальмеровской серии в спектре наиболее интенсивные. Для третьей звезды есть две принципиальные возможности: либо эта звезда темная, либо она не содержит линию Hα в спектре. В первом случае вполне естественно предположение о компактном объекте, скорее всего – нейтронной звезде. Это точно не белый карлик, так как масса превышает максимум для такого типа звезд. Возможен также вариант космологической (возрастной) черной дыры, собравшей вокруг себя кратную систему.

Если же тело 3 все же является нормальной звездой, то линий бальмеровской серии у нее может не быть в двух противоположных случаях – либо звезда очень горячая, и ее водород полностью ионизован, либо холодная, и атомы водорода находятся на первом энергетическом уровне, не поглощая бальмеровские кванты света. В первом случае это не может быть обычная звезда на главной последовательности, так как такие звезды с массой 2 массы Солнца не могут быть горячее класса A. Но это может быть гелиевая звезда, лишенная своей водородной оболочки другой компонентой кратной системы.

Вариант же холодной звезды с такой массой был бы возможен в виде красного гиганта с большим радиусом. Однако такой объект вряд ли смог бы существовать на орбите со звездой главной последовательности спектрального класса A в 1 а.е. друг от друга. Итак, наиболее вероятный кандидат на роль тела 3 – нейтронная звезда.

Система оценивания.

<u>1 этап – 2 балла.</u> Вывод о наличии третьего тела в системе. Он должен быть обоснован одним из двух факторов – быстрым вращением звезды 2, в котором не участвует звезда 1, или движением центра масс звезд 1-2 относительно наблюдателя с переменной лучевой скоростью. Если третье тело фигурирует в решении задачи без хотя бы одного из этих двух обоснований – этап оценивается 1 баллом, остальные оцениваются в полной мере.

Замечание: любое решение задачи, в которой в системе есть только две звезды, оценивается не выше 2 баллов.

<u>2 этап – 4 балла.</u> Оценка минимальной массы одной звезды на основе быстрого вращения звезды 2. Требуемая точность – 0.1 масса Солнца.

Вероятная ошибка участника: использование радиуса орбиты одной звезды вместо расстояния между ними в III законе Кеплера, что в итоге дает 8-кратную ошибку. Этап оценивается не выше 1 балла.

Замечание: полученное в этом этапе ограничение массы звезд снизу не оказалось решающим. Ее можно далее использовать для определения угла наклона орбиты к лучу зрения, но и это не является необходимым в решении. Тем не менее, выполнение этого этапа обязательно, так как факт, что данное ограничение массы оказалось более мягким, чем следующее, не является очевидным.

<u>3 этап – 5 баллов.</u> Оценка минимальной массы одной звезды на основе движения звезды 1. Требуемая точность – 0.4 массы Солнца.

Замечание по точности: базовым экспериментальным фактом, используемым здесь, является крайне малое изменение длины волны линии первой звезды. Однако, эта величина ($\Delta\lambda_1$) входит в итоговое выражение в степени (–1/2), что позволяет определить массу звезды с точностью не хуже 20%.

Вероятная ошибка участника: использование радиуса орбиты звезды 1 вместо расстояния до центра системы 2-3 в III законе Кеплера, что в итоге дает ошибку в 3 с лишним раза. Этап оценивается не выше 2 баллов.

Вероятная ошибка участника: неправильное определение радиуса орбиты звезды 1 и ее орбитальной скорости (например, фактор 1/2 или 1/3 вместо 2/3 в соответствующих формулах). Этап оценивается не выше 2 баллов.

<u>4 этап – 1 балл.</u> Вывод о минимальной суммарной массе системы. Оценивается только при правильном ответе с точностью до 20%.

Вероятное неверное выполнение этапов 2-4: участник опускает факторы cos i при анализе движения тел 2 и 1. Полученные значения масс интерпретируются не как минимальные, а как точные. В этом случае разность масс на 2 и 3 этапах может трактоваться как погрешность измерений или ошибок в вычислениях. Как возможное следствие, участник может выбрать значение массы одной звезды 0.55 масс Солнца (2 этап), так как оно меньше, а в условии требуется найти минимальное значение суммарной массы. В этом случае этапы 2 оценивается в 2 балла, этап 3 – в 3 балла (при условии отсутствия иных ошибок), этап 4 не засчитывается.

<u>5 этап – 1 балл.</u> Вывод о свойствах звезд 1 и 2.

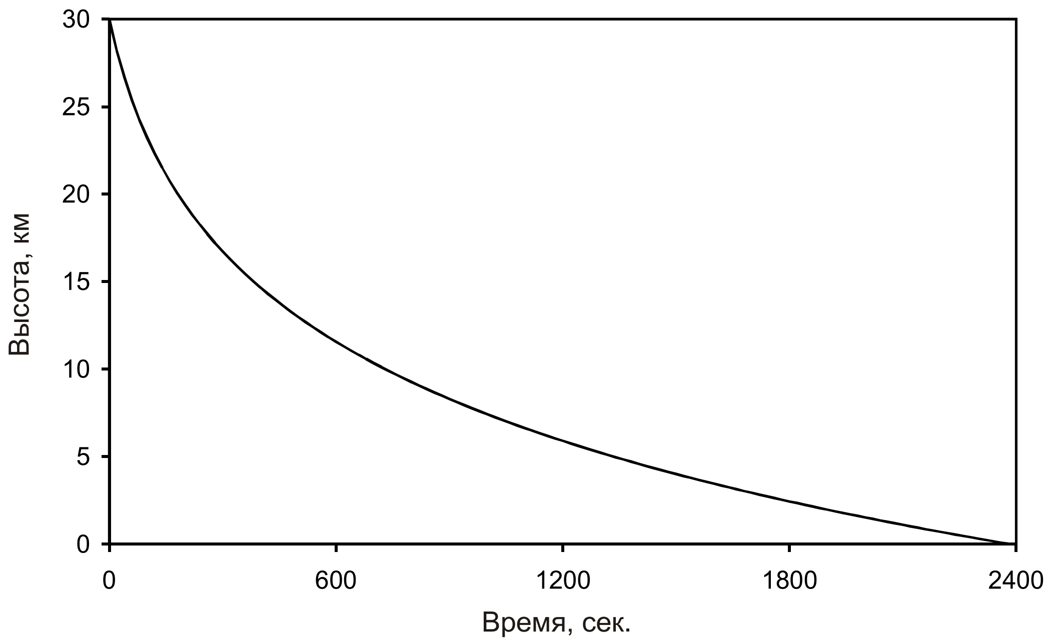
<u>6 этап – 2 балла.</u> Вывод о свойствах звезды 3. Указание только компактного объекта в виде нейтронной звезды или черной дыры оценивается в 1 балл. Для второго балла необходим критический анализ вариантов обычных звезд без линии Hα в спектре.

Примечание: если в результате ошибочных вычислений массы одной компоненты получается значение, меньшее 1.4 массы Солнца, белый карлик в качестве звезды 3 также считается правильным ответом на данном этапе решения. Но это также оценивается 1 баллом, для второго необходим анализ вариантов нормальных звезд. Если же масса одного тела получается еще меньше (например, 0.5-0.6 масс Солнца в соответствии с этапом 2), то участники должны рассмотреть вариант красных карликов и, вообще говоря, прийти к противоречию, так как линии водорода у них также крайне слабые, и становится непонятна природа звезд 1 и 2.

11.8. ПЕРЕД ПОСАДКОЙ *(О.С. Угольников)*

Условие. Космический аппарат готовится совершить посадку на поверхность далекой планеты, похожей по радиусу и массе на Землю. Завершив торможение двигателем в верхних слоях атмосферы, аппарат выключил его, раскрыл парашют и опускается строго вертикально. Радиолокатор непрерывно фиксирует данные о высоте аппарата над поверхностью. Пользуясь приведенным графиком, определите температуру атмосферы планеты, считая ее постоянной. Влиянием ветра на движение аппарата пренебречь. При решении задачи считать, что:

1) Сила сопротивления воздуха пропорциональна плотности воздуха и квадрату скорости аппарата;
2) Атмосфера целиком состоит из азота N_2, распределение концентрации молекул атмосферы с высотой h – больцмановское ($n \sim \exp(-\mu g h/\mathfrak{R}T)$, μ – молярная масса, g – ускорение свободного падения, $\mathfrak{R}$ – универсальная газовая постоянная, T – температура).



Решение. В условии задания сказано, что аппарат уже завершил торможение двигателем и спускается на парашюте. По графику мы видим, что скорость аппарата невелика (даже в начале интервала – несколько километров в минуту) и несопоставимо меньше космической. По ходу спуска скорость еще уменьшается. Поэтому мы можем решать задачу в равновесной модели – считать, что в любой момент времени сила сопротивления воздуха (ускорение a) уравновешивает силу притяжения аппарата (ускорение g) к планете. По мере снижения аппарата плотность атмосферы увеличивается, сила сопротивления воздуха растет, и равновесие достигается при меньшей скорости. В качестве подтверждения этой модели можно обратить внимание на то, что реальные величины итоговых ускорений аппарата ($g - a$) несравнимо меньше по величине, чем g, поэтому мы можем считать $g = a$. Кроме этого, мы можем считать ускорение свободного падения g постоянным.

В соответствии с условием задачи, ускорение силы сопротивления есть

$$a = K \cdot n \cdot v^2 = g = const.$$

Здесь n – концентрация молекул в воздухе, v – скорость снижения аппарата, K – некоторая постоянная. Это ускорение постоянно, так как оно уравновешивает ускорение свободного падения. Концентрация молекул меняется с высотой в соответствии с распределением Больцмана. Запишем выражение для скорости снижения аппарата:

$$v = -\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{g}{K \cdot n}} = \sqrt{\frac{g}{K \cdot n_0}} \cdot e^{\frac{\mu g h}{2\Re T}}.$$

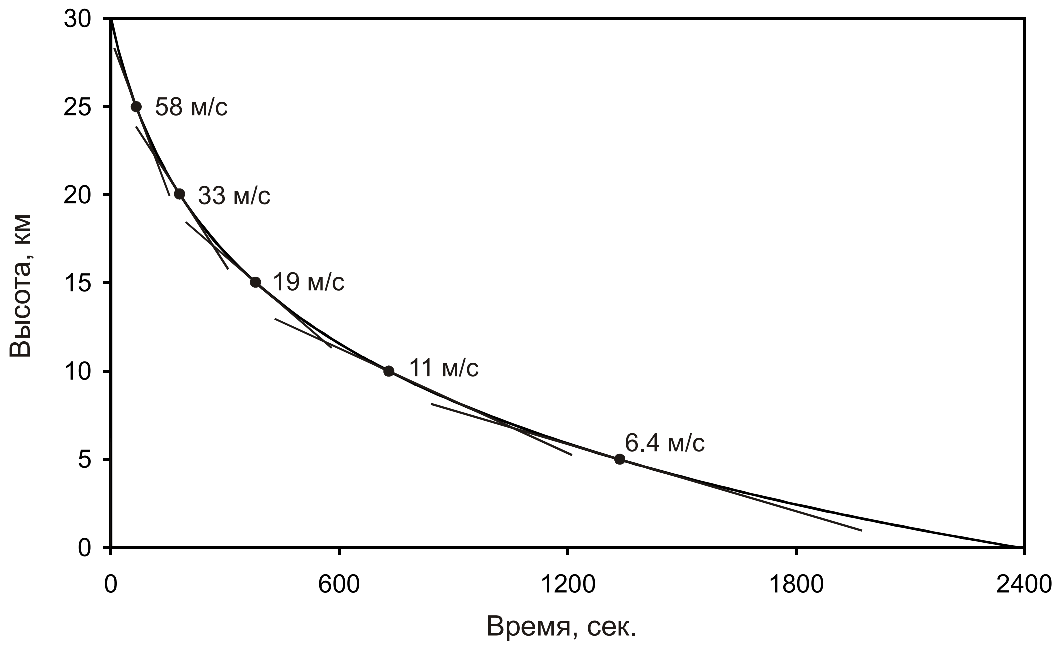
Здесь t – время, n_0 – концентрация молекул у поверхности. Мы можем прологарифмировать данное выражение:

$$ln\left(v\sqrt{\frac{K \cdot n_0}{g}}\right) = \frac{\mu g h}{2\Re T}.$$

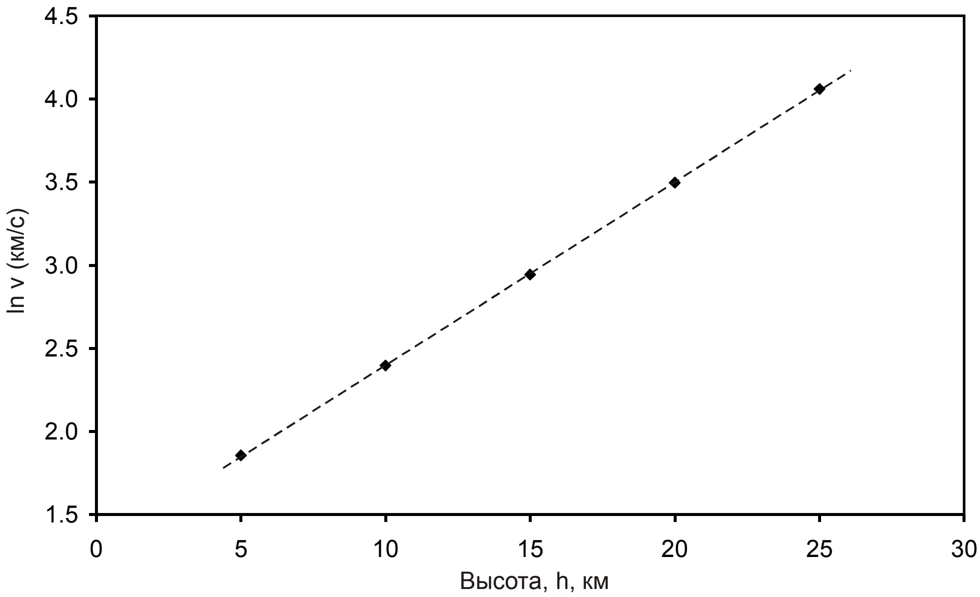
Множитель под корнем, умножаемый на скорость – постоянная величина. При логарифмировании он даст некоторое постоянное слагаемое к логарифму скорости (например, в метрах в секунду). В правой части уравнения мы видим высоту, умножаемую на постоянный фактор, в который входит температура. Таким образом, для решения задачи нам достаточно определить скорость снижения аппарата на некотором диапазоне высот h и построить зависимость ln v от h, которая должна оказаться линейной:

$$ln\ v = C \cdot h + const$$

Из коэффициента C мы сможем определить температуру.



Скорости определяются по линиям, касательным к кривой, приведенной в условии. Возьмем для примера пять высот от 5 до 25 км с шагом 5 км. Вычисляя натуральные логарифмы скоростей, строим их зависимость от высоты:



Зависимость действительно линейная, и ее коэффициент C равен

$$C = \frac{\mu \cdot g}{2\Re T} = 0.11\,км^{-1} = 1.1 \cdot 10^{-4}\ м^{-1}.$$

Планета похожа на Землю, поэтому ускорение свободного падения g мы принимаем равным 9.8 м/с$^{-2}$. Молярная масса молекулярного азота μ равна 0.028 кг/моль. Теперь мы можем определить температуру:

$$T = \frac{\mu \cdot g}{2\Re C} = 150\ K.$$

При своей кажущейся простоте, подобный метод измерения температур не потерял актуальности и используется даже на Земле, точнее в ее мезосфере и нижней термосфере. Там не используется парашют, а в качестве пробного тела выступает легкая сфера с радиомаяком. Методика вошла в литературу под названием «метод падающей сферы» и считается одним из самых точных локальных способов измерения температуры в верхней атмосфере. Разумеется, равновесная модель при обработке результатов там не применяется.

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Указание, что решение можно вести в равновесной модели. Если это делается без обоснования – за этап выставляется 1 балл (дальнейшие этапы оцениваются в полной мере), если говорится о малых скоростях или ускорении, существенно меньшем ускорения свободного падения – этап засчитывается полностью.

Участник вправе не делать это предположение, а производить вычисления в общем виде. Это усложняет решение, но к нему предъявляются такие же требования по точности.

2 этап – 4 балла. Восстановление связи скорости движения аппарата и высоты с учетом распределения Больцмана. Участник может по-другому записывать постоянные множители в выражении для скорости, обязательным должен быть экспоненциальный множитель с правильным выражением. При отсутствии там коэффициента 2 (и – как следствие – итогового завышения температуры в 2 раза) за этап выставляется 1 балл, остальные оцениваются в полной мере. При отрицательном коэффициенте перед высотой в показателе экспоненты в выражении для скорости (не концентрации) этап не засчитывается.

3 этап – 4 балла. Восстановление данных о скорости аппарата на разных высотах. Для достижения нужной точности имеет смысл определить скорость хотя бы на трех – четырех высотах. При использовании только двух высот оценка уменьшается на 2 балла. При этом последующий этап оценивается, исходя из итоговой точности температуры.

4 этап – 5 баллов. Определение температуры атмосферы планеты, точность 10K. При превышении погрешности оценка уменьшается на 1 балл за каждые 10K дополнительной погрешности, при этом оценка за этап не может быть меньше нуля.

Комментарий: Участник может выполнять решение по-другому: при желании и владении соответствующим аппаратом, он может получить прямую связь времени и высоты, исходя из свойств сопротивления воздуха и предположения о равновесии:

$$\frac{\mu \cdot g^{3/2}(t-t_0)}{2\Re T\sqrt{Kn_0}} = e^{-\frac{\mu g h}{2\Re T}} - e^{-\frac{\mu g h_0}{2\Re T}}.$$

Здесь t_0 – некоторое начальное время, h_0 – высота в этот момент. Это соотношение в принципе позволит ему не определять из графика скорости в конкретных точках, а работать прямо с диаграммой «время – высота». При условии правильного выполнения это оценивается полностью.