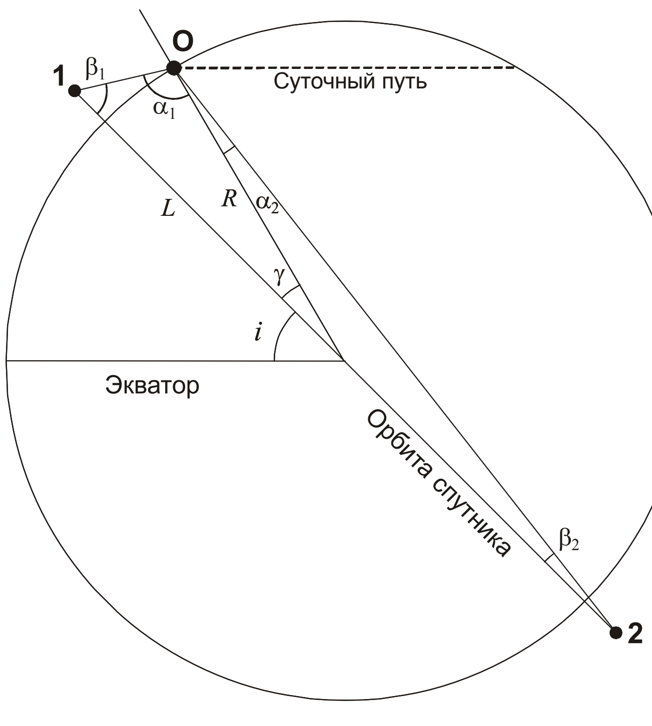
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2022 год
Первый (базовый) тур

БАЗОВЫЙ ТУР

9/10.1. СПУТНИК В НЕБЕ

Условие. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите. При наблюдении из некоторой точки на поверхности Земли он может располагаться на высотах от –80° (спутник под горизонтом) до +10° (спутник над горизонтом). Найдите высоту спутника над поверхностью Земли. Рефракцией пренебречь.

Решение. Изобразим Землю в плоскости, содержащей ее полюса, и перпендикулярной плоскости орбиты спутника.



Орбита спутника наклонена на некоторый угол i к плоскости экватора. Коль скоро в указанной в условии точке Земли **O** спутник не поднимается в зенит и не опускается в надир, эта точка находится на широте, по модулю большей, чем угол i. Положим для определенности, что эта точка располагается в северном полушарии, ее широта есть $i+\gamma$, причем этот угол должен быть меньше 90°. Отметим точки **1** и **2** – положения спутника, при котором он окажется на наибольшей и наименьшей высоте над горизонтом. Обратим внимание, что оба случая относятся к одному и тому же положению точки **O** в ходе ее суточного вращения, показанного пунктиром.

Обозначим как α_1 (α_2) углы между направлениями на спутник и центр Земли. Эти углы определяются высотами спутника над горизонтом:

$$\alpha_1 = 90° + h_1 = 100°;$$
$$\alpha_2 = 90° + h_2 = 10°.$$

Углы с вершинами в положениях спутника, образованные направлениями на наблюдателя и центр Земли, равны

$$\beta_1 = 180° - \alpha_1 - \gamma;$$
$$\beta_2 = 180° - \alpha_2 - (180° - \gamma) = \gamma - \alpha_2.$$

Обозначим радиус Земли как R, радиус орбиты спутника как L. Запишем выражение теоремы синусов в треугольниках «спутник – наблюдатель – центр Земли»:

$$\frac{L}{\sin\alpha_1} = \frac{R}{\sin\beta_1} = \frac{R}{\sin(\gamma+\alpha_1)};$$
$$\frac{L}{\sin\alpha_2} = \frac{R}{\sin\beta_2} = \frac{R}{\sin(\gamma-\alpha_2)}.$$

Отсюда мы получаем:

$$\frac{L}{R} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\gamma+\alpha_1)} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\gamma-\alpha_2)}.$$

Используя свойства пропорции во втором равенстве, имеем:

$$\sin\alpha_1 \sin(\gamma - \alpha_2) = \sin\alpha_2 \sin(\gamma + \alpha_1);$$
$$\sin\alpha_1 (\sin\gamma \cos\alpha_2 - \cos\gamma \sin\alpha_2) = \sin\alpha_2 (\sin\gamma \cos\alpha_1 + \cos\gamma \sin\alpha_1).$$
$$\sin\gamma (\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1) = 2\cos\gamma \sin\alpha_1 \sin\alpha_2.$$

В итоге,

$$\gamma = \mathrm{arctg}\,\frac{2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)} = 19^{\circ}.$$

Обратим внимание, что указанная в условии картина может иметь место при наклонении орбиты спутника не более 71°. Высота спутника над поверхностью Земли равна

$$H = L - R = R\cdot\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\gamma)} - 1\right) = 800 \text{ км}.$$

Система оценивания.

1 этап (3 балла). Правильное представление относительной конфигурации точки наблюдения и положения спутников. Для полного оценивания этапа достаточно текстового указания, что обе ситуации соответствуют одному и тому же положению наблюдателя на своем круге суточного вращения или рисунку, где будет отражен этот факт.

Вероятная ошибка участника: предположение, что случай наименьшей высоты спутника соответствует противоположному положению наблюдателя на суточном круге. В этом случае ответ оказывается функцией угла наклона орбиты спутника к экватору или широты места наблюдения, которые в условии не заданы. Таким образом, любое конкретное численное значение радиуса орбиты или высоты спутника, полученное в решении, является либо в корне неверным, либо соответствует какому-то одному значению наклона или широты, принятому участником по ходу решения. В первом случае все решение не может быть оценено выше, чем 1 баллом. Во втором случае за все решение может быть выставлено максимум 3 балла (0 баллов за первый этап и 50% баллов за оставшееся решение как за рассмотрение частного случая), если при этом не делается иных ошибок, и полученный ответ действительно соответствует принятому допущению.

2 этап (5 баллов). Вычисление радиуса орбиты спутника либо угла γ. Ответ может быть записан численно или аналитически. Возможны разные способы выполнения этапа. В частности, можно пользоваться теоремой косинусов и получать выражения для расстояния спутника от наблюдателя, что приводит к более сложным выкладкам, но также обосновано. Допустимая погрешность вычисления угла γ составляет 0.5°, что соответствует погрешности радиуса орбиты (и итоговой высоты) около 50 км.

Возможное приближенное решение: участник указывает, что радиус орбиты спутника незначительно превосходит радиус Земли, так как максимальная высота спутника невелика. Тогда мы можем приближенно считать, что $\beta_2 = \alpha_2 = \gamma/2 = 10°$, $\gamma = 20°$, и далее $H = 870$ км. Это приводит к погрешности вдвое больше допустимой, оценка за этап составляет 3 балла из 5, последний этап засчитывается наполовину (максимальная оценка за все решение – 7 баллов).

Возможное приближенное решение: графическое построение. При данном методе участник должен правильно указать взаимные конфигурации наблюдателя и спутника, соответствующие его максимальной и минимальной высоте, в частности, что они соответствуют одному и тому же положению наблюдателя на вращающейся Земле. Фактически – это выполнение первого этапа описанного выше решение, которое также оценивается в 3 балла при наличии всех обоснований. Далее участник может построить рисунок, аналогичный приведенному выше, где вместо отрезков **O1** и **O2** будут лучи, соответствующие заданным высотам спутника, а сами точки **1** и **2** однозначно выбираются на них из условия, что серединой отрезка **12** должен быть центр Земли. Этот подход считается приближенным выполнением этапа 2 и оценивается в 4 балла из 5 при верном выполнении. Последующий третий этап (определение высоты спутника) оценивается из критериев точности, описанных ниже.

Возможная ошибка при решении: участник забывает, что углы α_1 и α_2 отсчитываются в разные стороны от радиуса-вектора наблюдателя, и считает треугольник **1O2** прямоугольным. Это должно приводить к равенству радиусов орбиты спутника и Земли и нулевой высоте. Если подобный вывод делается, то за этап выставляется 1 балл, и еще 1 балл при наличии комментария о физической неосуществимости решения. Если же в этом случае получено какое-либо другое значение высоты спутника – этап не засчитывается. Во всех этих случаях также не засчитывается последний этап решения.

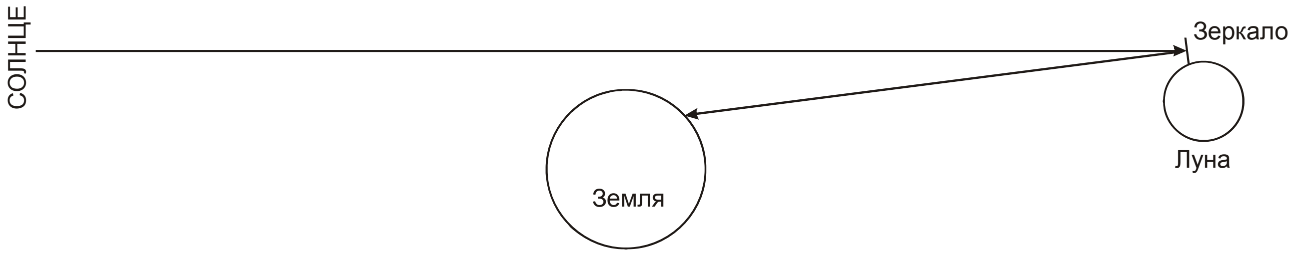
Этап 3 (2 балла) – вычисление высоты спутника. Оценивается в случае правильного ответа с допустимой погрешностью 50 км, при ошибке до 100 км выставляется 1 балл.

9.2. ЛУННЫЙ ОТРАЖАТЕЛЬ

Условие. На Луне установили отражатель – идеальное плоское зеркало, имеющее форму круга. В один момент зеркало отразило свет Солнца на Землю. При наблюдении с Земли в максимуме яркости пятно на Луне имело такую же звездную величину, как расположенный рядом на небе Юпитер в противостоянии. Определите диаметр зеркала. В момент наблюдений Земля Луну и зеркало не затеняла. Орбиты Луны и планет считать круговыми, потемнение диска Солнца к краю не учитывать.

Решение. Луна расположена существенно ближе к нам, чем Солнце, а отраженное изображение Солнца будет таким же по поверхностной яркости, как и сам диск Солнца. Но угловые размеры зеркала существенно меньше угловых размеров Солнца, поэтому пятно будет существенно слабее Солнца в небе Земли.

Коль скоро рядом с Луной располагается Юпитер в противостоянии с Солнцем, дело происходило в полнолуние, когда Земля и Солнце располагаются с одной стороны от Луны, но при этом Земля зеркало не затеняет. В этом случае свет Солнца, чтобы отразиться на Землю, должен падать под малым углом к нормали зеркала, и с Земли оно наблюдается «плашмя». В этом случае угловой радиус зеркала при наблюдении с Земли равен



$$\rho = r / l,$$

где r – радиус зеркала, l – расстояние от Земли до Луны. Угловой радиус Солнца есть

$$\rho_0 = R / L,$$

где R – радиус Солнца, L – расстояние от Солнца до Земли. Соотношение видимых площадей зеркала и Солнца есть

$$\eta = \frac{\pi\rho^2}{\pi\rho_0^2} = \frac{r^2L^2}{R^2l^2}.$$

По условию задачи, зеркало светит как Юпитер со звездной величиной m = –2.7 (величина приведена в справочных данных). Видимая звездная величина Солнца есть m_0 = –26.8. Запишем формулу Погсона:

$$m = m_0 - 2.5\lg\eta = m_0 - 5\lg\frac{rL}{Rl}.$$

Отсюда получаем диаметр зеркала:

$$d = 2r = \frac{2Rl}{L}\cdot 10^{0.2(m_0-m)} = 54 \text{ м.}$$

Система оценивания:

1 этап (2 балла): вывод, что картина наблюдается в полнолуние, и зеркало повернуто плашмя к Солнцу и Земле. Вывод должен быть записан в текстовом виде или графически (рисунок с правильным расположением всех тел).

2 этап (4 балла): выражение для яркости отражения Солнца в зеркале. Проще всего его сделать через видимую площадь зеркала, хотя участники могут использовать и другие методы (например, записывать выражения для соответствующих потоков световой энергии, см. ниже). Величину углового радиуса или диаметра Солнца участники могут брать как известную, могут вычислять ее. Уменьшение расстояния до Луны за счет размеров Земли, если Луна находится вблизи зенита, изменяет итоговый ответ на 1 метр и не является обязательным для учета.

3 этап (4 балла): определение диаметра зеркала, точность 5 метров. При ошибке в 2 раза, вызванной путаницей понятий радиуса и диаметра, оценка уменьшается на 2 балла.

Альтернативный путь решения (2-3 этапы): расчет производится через энергетические величины. Участник может указать, что количество энергии, отражаемое зеркалом за секунду, есть $F_0 \cdot \pi r^2$, где F_0 – плотность энергии от Солнца на расстоянии Земли и Луны. Далее можно указать, что около Земли эта энергия будет распределена по кругу с радиусом $l\rho_0$. Следовательно, плотность потока энергии от зеркала на Земле есть

$$F = F_0 \cdot \pi r^2 / \pi l^2 \rho_0^2 = F_0 \cdot r^2 / l^2 \rho_0^2 = F_0 \cdot r^2 L^2 / l^2 R^2,$$

что эквивалентно полученным выше соотношениям и соответствует выполненному второму этапу. Расчет звездных величин аналогичен, весь подход при правильном выполнении оценивается полностью.

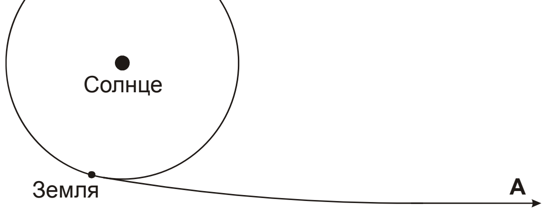
9/10.3. ПОСЛАНИЕ ЦИВИЛИЗАЦИЯМ

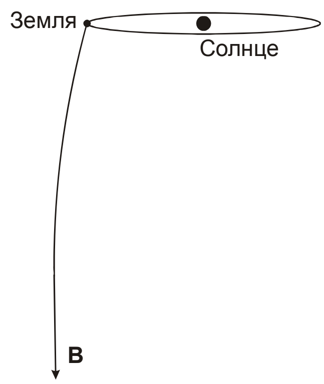
Условие. Астрономы открыли обитаемые планеты у двух далеких звезд. Одна из них (звезда A) располагалась на небе на эклиптике, другая (звезда B) – в полюсе эклиптики. Расстояние до обеих звезд оказалось одинаковым, звезды были неподвижны относительно Солнца. Было принято решение отправить к ним одинаковые космические аппараты с посланием от землян. Технические возможности позволяли отправить аппарат с Земли, придав ему стартовую геоцентрическую скорость ровно 54 км/с, далее он летел без двигателей, не встречаясь ни с какими другими телами на своем пути. Какая из двух обитаемых планет может быть достигнута аппаратом быстрее при оптимальном расчете траектории и во сколько раз? Орбиту Земли считать круговой, влиянием атмосферы Земли пренебречь.

Решение. Обозначим стартовую скорость аппарата как u_S. После запуска аппарату будет необходимо преодолеть притяжение Земли. Из закона сохранения энергии мы можем получить величину геоцентрической скорости аппарата, когда он выйдет из сферы действия Земли:

$$u_E = \sqrt{u_S^2 - u_P^2} = 52.8 \text{ км/с}.$$

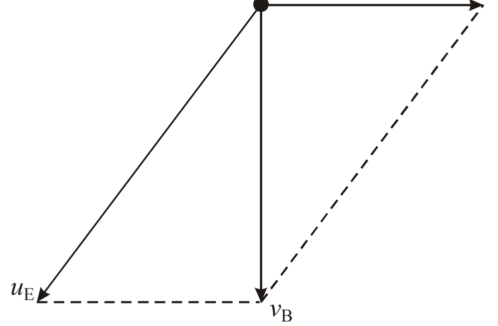
Здесь u_P – параболическая (вторая космическая) скорость для Земли, равная 11.2 км/с. Выйдя из сферы действия Земли, аппарат начнет движение по Солнечной системе. Его гелиоцентрическая скорость будет зависеть от направления движения относительно Земли и Солнца. Для полета к звезде A на эклиптике оптимально запустить аппарат так, чтобы его геоцентрическая скорость сложилась с орбитальной скоростью Земли v_0 = 29.8 км/с (рисунок слева).





Гелиоцентрическая скорость первого аппарата будет равна $v_A = u_E + v_0 = 82.6$ км/с. Со вторым аппаратом ситуация сложнее (правый рисунок сверху). Чтобы достичь звезды в полюсе эклиптики, он должен выйти на полярную орбиту, перпендикулярную плоскости эклиптики в Солнечной системе.

Обратим внимание, что из-за притяжения Солнца орбита аппарата не является прямой линией, и он не должен сразу отправляться в направлении полюса эклиптики. Тем не менее, для выхода на полярную орбиту его гелиоцентрическая скорость должна быть перпендикулярной гелиоцентрической скорости Земли. Рисунок справа изображен в плоскости, содержащей эти две гелиоцентрические скорости (но не в плоскости, перпендикулярной эклиптике).



Чтобы гелиоцентрическая скорость аппарата была направлена перпендикулярно движению Земли, его придется запускать с Земли несколько «назад» по отношению к движению нашей планеты. В итоге, гелиоцентрическая скорость аппарата составит:

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{u_{\mathrm{E}}^2 - v_0^2} = \sqrt{u_{\mathrm{S}}^2 - u_{\mathrm{P}}^2 - v_0^2} = 43.6\ \text{км/с}.$$

Такими будут гелиоцентрические скорости аппаратов вблизи Земли. Далее им предстоит преодолеть притяжение Солнца. Вновь пользуясь законом сохранения энергии, определяем скорости аппаратов при их вылете из Солнечной системы:

$$v_{\mathrm{AB0}} = \sqrt{v_{\mathrm{AB}}^2 - v_{\mathrm{P}}^2} = \sqrt{v_{\mathrm{AB}}^2 - 2v_0^2}.$$

Здесь v_{P} – параболическая скорость относительно Солнца на расстоянии Земли. В итоге, мы получаем скорости, с которыми аппараты будут двигаться к далеким звездам:

$$v_{\mathrm{A0}} = \sqrt{(u_{\mathrm{E}} + v_0)^2 - 2v_0^2} = \sqrt{u_{\mathrm{E}}^2 + 2u_{\mathrm{E}}v_0 - v_0^2} = \sqrt{u_{\mathrm{S}}^2 - u_{\mathrm{P}}^2 + 2v_0\sqrt{u_{\mathrm{S}}^2 - u_{\mathrm{P}}^2} - v_0^2} = 71.1\ \text{км/с}.$$

$$v_{\mathrm{B0}} = \sqrt{u_S^2 - u_P^2 - 3v_0^2} = 11.2\ \text{км/с}.$$

Скорость аппарата, летящего к звезде A, после вылета из Солнечной системы будет примерно в 6.3 раза больше, чем скорость аппарата, летящего к звезде B, соответственно, планета у звезды A может быть достигнута в 6.3 раза быстрее.

Система оценивания. Итоговая оценка участника будет определяться теми факторами, которые он учтет при расчете скорости аппаратов при их движении к звездам. При пропуске или неверном учете того или иного фактора данный этап не засчитывается, учет последующих факторов проводится в полной мере. Финальный этап оценивается исходя из полученного результата.

Фактор 1 (2 балла) – притяжение Земли. В реальности, оно мало влияет на движение аппарата, отправляющегося к звезде A, и даже не является обязательным для этого аппарата. В то же время, для аппарата, летящего к звезде B, учет важен. Как мы можем видеть из последней формулы решения, его пропуск даст в итоге скорость v_{B0}, равную 15.9 км/с, и соотношение времен достижения звезд около 4.5.

Фактор 2 (4 балла) – учет движения Земли. Результатом учета должны быть правильные численные или аналитические выражения для гелиоцентрической скорости аппаратов относительно Солнца вблизи Земли (по 2 балла за каждый аппарат).

Возможная ошибка участника: предположение, что аппарат B нужно просто запустить перпендикулярно движению Земли, и его гелиоцентрическая скорость будет равна геоцентрической либо даже превышать ее. 2 балла, связанные с анализом данного этапа, не выставляются.

Фактор 3 (2 балла) – учет притяжения Солнца. Результатом учета должны быть правильные численные или аналитические выражения для гелиоцентрической скорости аппаратов относительно Солнца при вылете из Солнечной системы (по 1 баллу за каждый аппарат).

Финальный этап (2 балла) – определение соотношения времен достижения звезд. Этап оценивается, если сделан вывод, что звезда A будет достигнута раньше, а соответствующее соотношение времен окажется в интервале от 6 до 7. При большей погрешности, если в ответе участника звезда A достигается раньше, а отношение оказывается больше 4 (не ограничено сверху), этап оценивается 1 баллом. При иных выводах (в том числе в случае недостижимости звезды B) этап не оценивается.

9.4. СПАСЕНИЕ ПЛАНЕТЫ

Условие. В фантастическом сериале «Доктор Кто» главный герой, чтобы спасти свою планету – Галлифрей, переместил ее в пространстве к другой звезде. Каковы должны быть параметры орбиты, чтобы диапазон температур за местный год оставался таким же? Какова будет продолжительность года в этом случае (в земных годах)? Параметры родной системы Галлифрея: масса звезды $M_1 = 2.5\ M_0$, радиус звезды $R_1 = 1.84\ R_0$, температура поверхности звезды $T_1 = 10700$ K, большая полуось орбиты $a_1 = 5.4$ а.е., эксцентриситет $e_1 = 0.3$. Параметры новой звезды: $M_2 = 0.5\ M_0$, $R_2 = 0.15\ R_0$, $T_2 = 3500$ K. Индекс «0» относится к Солнцу. Считать, что альбедо и парниковые свойства атмосферы планеты не зависят от спектрального состава излучения звезды и не изменяются при перемещении планеты, масса планеты существенно меньше масс каждой из звезд.

Решение. Для того, чтобы тепловой режим на планете оставался неизменным, таким же должен оставаться поток энергии от звезды на расстоянии планеты L. Этот поток равен

$$F = \frac{J}{4\pi L^2} = \frac{4\pi\sigma R^2 T^4}{4\pi L^2} = \frac{\sigma R^2 T^4}{L^2}.$$

Расстояние до планеты L в ходе орбитального периода меняется от $a\,(1 - e)$ до $a\,(1 + e)$, и для сохранения диапазона температур эксцентриситет орбиты планеты e должен остаться тем же: $e_2 = e_1 = 0.3$. Для сохранения средней температуры должен сохраняться средний поток, который определяется предыдущей формулой с подстановкой большой полуоси a в качестве расстояния L. Таким образом, мы имеем:

$$\frac{R_1^2 T_1^4}{a_1^2} = \frac{R_2^2 T_2^4}{a_2^2}; \quad a_2 = a_1 \frac{R_2 T_2^2}{R_1 T_1^2} = 0.047 \text{ а.е.}$$

Нам остается найти новую продолжительность года. Это можно сделать из III закона Кеплера, выражая большую полуось в астрономических единицах, массу – в массах Солнца:

$$t = \left(\frac{a^3}{M}\right)^{1/2} = 0.014 \text{ лет}.$$

Система оценивания:

Этап 1 (1 балл): указание, что эксцентриситет орбиты планеты должен остаться без изменений и составить 0.3.

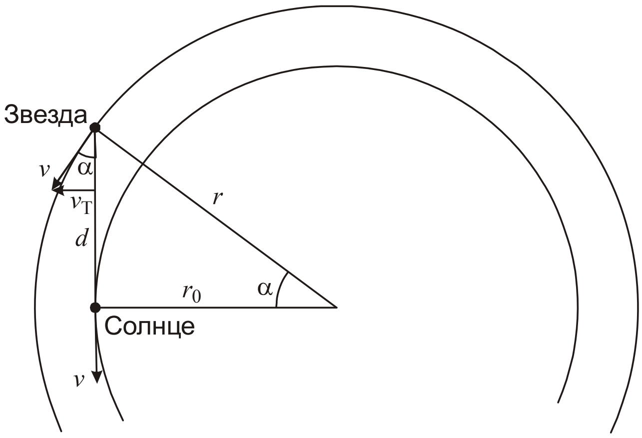
Этап 2 (5 баллов): определение большой полуоси новой орбиты планеты, точность 0.005 а.е. При проверке жюри необходимо обратить внимание на правильность учета температур и радиусов звезд, которые должны соотноситься с величиной большой полуоси в нужных степенях.

Этап 3 (4 балла): определение нового периода обращения планеты в годах, точность 0.003 года.

9/10.5. В ДИСКЕ ГАЛАКТИКИ

Условие. Некоторая звезда наблюдается в небе Земли в Млечном пути, в 90° от центра Галактики. Ее собственное движение на небе направлено вдоль Млечного пути и составляет 0.0050″ в год. Считая, что звезды в диске обращаются по круговым траекториям в одной плоскости в одном направлении со скоростью 230 км/с, не зависящей от расстояния до центра Галактики, определите расстояние от Солнца до звезды. Солнце удалено от центра Галактики на 8.5 кпк.

Решение. Звезда расположена в 90° от центра Галактики на небе Земли, следовательно, она располагается дальше в Галактике от ее центра, чем Солнце. Обозначим радиусы орбит Солнца и звезды в Галактике как r и r_0.



Скорость Солнца направлена в пространстве от звезды (либо к ней), и на видимое собственное движение звезды не влияет. Скорость звезды направлена под углом α к направлению на Солнце. Угловая скорость звезды при наблюдении с Солнца равна

$$\omega = \frac{v_{\mathrm{T}}}{d} = \frac{v \sin\alpha}{r_0 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{v}{r_0}\cos\alpha .$$

Обратим внимание, что эта угловая скорость равна угловой скорости движения звезды вокруг центра Галактики (v/r). Расстояние от Солнца до звезды есть

$$d = r_0 \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{v^2 - \omega^2 r_0^2}}{\omega} \approx 4.7 \text{ кпк.}$$

Здесь угловую скорость (собственное движение) звезды ω необходимо выразить в радианах в секунду ($8\cdot10^{-16}$ рад/с), а расстояние до центра Галактики r_0 – в километрах ($2.5\cdot10^{17}$ км).

Система оценивания. Данное задание может решаться разными способами. По аналогии с конфигурациями планет, можно указать, что данная звезда является «внешней» по отношению к Солнцу и в указанный момент находится в квадратуре, тогда как Солнце по отношению к ней – в наибольшей элонгации. В этом случае угловая скорость Солнца в небе этой звезды (равная угловой скорости звезды в небе Солнца) совпадает с угловой скоростью центра Галактики, что сразу приводит нас к первой формуле решения, приведенного выше. Общая структура решения разбивается на следующие этапы:

1 этап (5 баллов) – связь угловой скорости движения звезды в нашем небе с пространственной скоростью звезд и расстоянием от центра Галактики до звезды (или до Солнца). Данная связь может быть выражена аналитически или численно или в явном виде следовать из выкладок участника. В случае ошибочной связи (например, иная функция угла α в виде множителя в первой формуле) за этап выставляется 3 балла, если ошибка не превышает 2 раз. Если же ошибка больше, а угловая скорость не равна отношению (v/r_0), умноженному на фактор, определяемым углом α – этап не засчитывается.

2 этап (5 баллов) – вычисление расстояния до звезды. Для выставления максимальной оценки значение, округленное до целых килопарсек, должно составлять 4 или 5. Если округленный до целых килопарсек ответ составляет 3 или 6 при правильном ходе решения, оценка за этап уменьшается до 4 баллов.

При больших ошибках жюри нужно обращать внимание на соотношение величин v и ωr_0 в решении участника, квадраты которых вычитаются в верном решении, приведенном выше. Если в результате численных ошибок у участника фактически получается соотношение $v \gg \omega r_0$ и, как следствие, $d = v/\omega \approx 10$ кпк, то оценка за этап не превышает 2 баллов и еще уменьшается при наличии иных ошибок.

В противоположном случае, при $v < \omega r_0$ участник должен прийти к выводу об отсутствии решения задачи. Оценка за этап в этом случае составляет 1 балл и уменьшается далее до нуля, если при подобном соотношении участник все же находит какое-то решение задания.

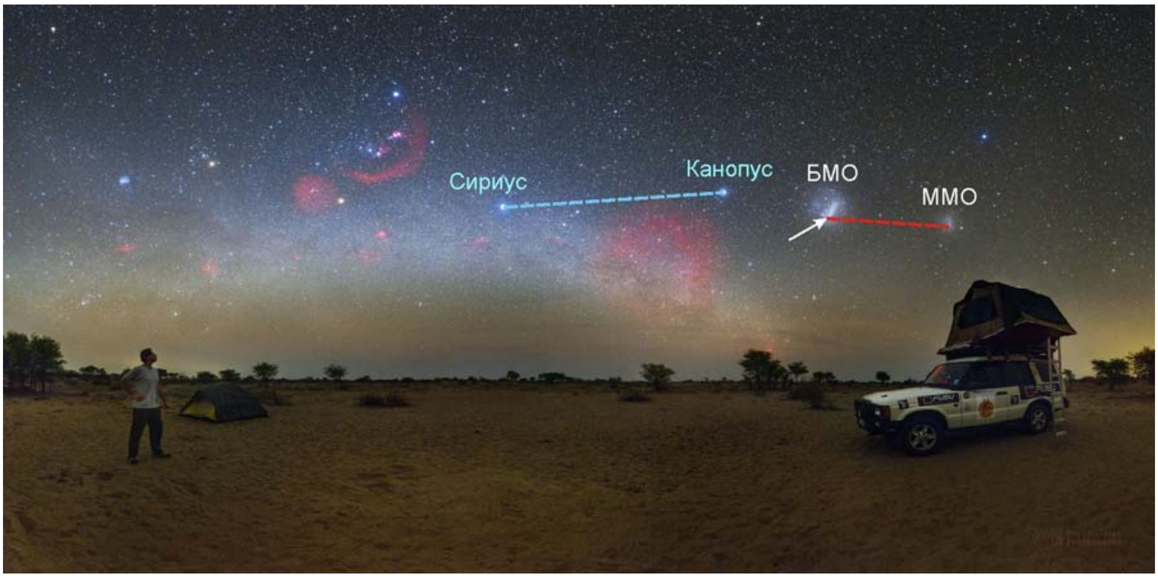
Если же величины v и ωr_0 (либо v/w и r_0) входят в выражение для расстояния не в виде разности квадратов (теорема Пифагора), а в ином виде (например, суммы или разности) – второй этап полностью не засчитывается.

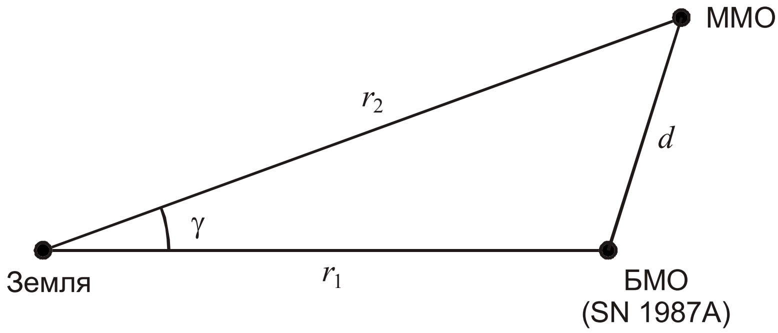
9.6. ДОМ ПОСЛЕДНЕЙ СВЕРХНОВОЙ

Условие. Перед Вами фото звездного неба (автор – Петр Горалек), в правой части которого видны Магеллановы облака – спутники нашей Галактики. В Большом Магеллановом облаке, в точке неба, помеченной стрелкой, в 1987 году наблюдалась последняя по сей день Сверхновая звезда, видимая невооруженным глазом: ее блеск достиг 3^m. Определите, каким был максимальный блеск этой Сверхновой при наблюдении из Малого Магелланова облака, которое находится на 20% дальше от нас, чем Большое. Межзвездным поглощением света пренебречь. В таблице приведены экваториальные координаты ярких звезд неба, попавших на фотографию. Неоднородность масштаба фотографии не учитывать.

Звезда	α (2000.0)	δ (2000.0)	Созвездие
Альдебаран	04ч 36м	+16.5°	Телец
Ахернар	01ч 38м	–57.2°	Эридан
Бетельгейзе	05ч 55м	+7.4°	Орион
Канопус	06ч 24м	–52.7°	Киль
Ригель	05ч 15м	–8.2°	Орион
Сириус	06ч 45м	–16.7°	Большой Пес

Решение. Данные о звездах нам нужны для того, чтобы определить масштаб фото и вычислить угловое расстояние между Магеллановыми облаками. В принципе, для этого достаточно пары звезд, которые не находились бы слишком близко друг к другу. Удобнее всего использовать две ярчайшие звезды ночного неба: Сириус и Канопус. Они имеют близкое прямое восхождение (разница $\Delta\alpha$=21 мин или чуть более 5°), а склонения отличаются на $\Delta\delta$=36°. Поэтому с точностью, достаточной для оценок в данной задаче, можно считать угловое расстояние между ними равным $\Delta\delta$ (погрешность будет меньше 0.5°). Соединяя одним (синим) отрезком Сириус с Канопусом, а другим (красным) место Сверхновой в Большом Магеллановом облаке с центром Малого Магелланова облака, мы получаем, что длина красного отрезка составляет примерно 0.55 от длины синего отрезка, а значит, искомое угловое расстояние составляет $\gamma=36°\cdot0.55\approx20°$. Погрешность в данном случае не превосходит 2-3°.





Расстояния до Магеллановых облаков нам в условии не заданы, но известно их соотношение r_2/r_1=1.2. Это позволяет нам найти расстояние между галактиками в относительных единицах:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\gamma} = 0.43 \cdot r_1.$$

Звездная величина m_0 с расстояния r_1 нам известна. Пренебрегая межзвездным поглощением, находим звездную величину Сверхновой с расстояния d:

$$m = m_0 + 5 \lg (d/r_1) \approx 1.$$

Несмотря на визуальное соседство галактик, Сверхновая в БМО не выглядела из ММО исключительно яркой.

Система оценивания:

1 этап (4 балла): определение углового расстояния между галактиками на небе. Определяется правильностью выбранного метода и точностью результата. Допустимая погрешность – 3° (при использовании пары Сириус-Канопус результат составляет 20°, Бетельгейзе-Ригель – 19°). Далее оценка уменьшается на 1 балл за каждые 3° дополнительной погрешности.

2 этап (4 балла): определение пространственного расстояния между галактиками. Приближенное вычисление расстояний $d = r_1\gamma$ или $d = 0.2r_1$ "в обход" теоремы косинусов оцениваются в 1 балл (во втором из этих случаев фактически не выполняется и не оценивается и первый этап). Требуемая точность (без учета погрешностей предыдущих этапов) составляет 20%.

3 этап (2 балла): определение звездной величины Сверхновой из Малого Магелланова облака. Ввиду оценочного характера задачи точность в 1^m является вполне достаточной. Ошибки на предыдущих этапах не являются основанием для снижения оценки за этот этап, при условии, что в предыдущих этапах было получено неабсурдное значение d (не менее $0.1r_1$ и не более r_1), а на этом этапе получена звездная величина, соответствующая найденному значению d.

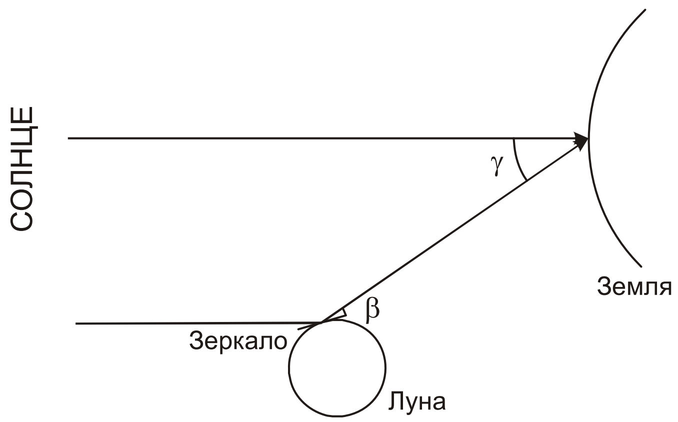
10.2. ЛУННЫЙ ОТРАЖАТЕЛЬ

Условие. На Луне установили отражатель – идеальное плоское зеркало, имеющее форму круга. В один момент зеркало отразило свет Солнца на Землю. При наблюдении с Земли в максимуме яркости пятно на Луне имело такую же звездную величину, как расположенная рядом на небе Венера в наибольшей элонгации. Определите диаметр зеркала. Орбиты Луны и планет считать круговыми, потемнение диска Солнца к краю не учитывать.

Решение. Луна расположена существенно ближе к нам, чем Солнце, а отраженное изображение Солнца будет таким же по поверхностной яркости, как и сам диск Солнца. Но угловые размеры зеркала существенно меньше угловых размеров Солнца, поэтому пятно будет существенно слабее Солнца в небе Земли.

Рядом с Луной располагается Венера, находящаяся в этот момент в наибольшей элонгации от Солнца. Этот факт дает нам возможность определить угловое расстояние между Луной и Солнцем на небе:

$$\gamma = \arcsin(L_V/L) = 46°.$$



Здесь L_V и L – расстояния от Солнца до Венеры и Земли соответственно. Чтобы зеркало в таком положении могло отразить солнечный свет на Землю, его плоскость должна располагаться под углом $\beta=\gamma/2=23°$ к линиям Земля-Луна и Луна-Солнце. Зеркало будет наблюдаться с Земли в виде эллипса. Его большая полуось равна

$$\rho = r / l,$$

где r – радиус зеркала, l – расстояние от Земли до Луны. Малая полуось эллипса будет равна $r \sin\beta$. Угловой радиус Солнца есть

$$\rho_0 = R / L,$$

где R – радиус Солнца. Соотношение видимых площадей зеркала и Солнца есть

$$\eta = \frac{\pi\rho^2 \sin\beta}{\pi\rho_0^2} = \frac{r^2 L^2 \sin\beta}{R^2 l^2}.$$

По условию задачи, зеркало светит как Венера со звездной величиной m = –4.4 (величина приведена в справочных данных). Видимая звездная величина Солнца есть m_0 = –26.8. Запишем формулу Погсона:

$$m = m_0 - 2.5\lg\eta = m_0 - 5\lg\frac{rL\sqrt{\sin\beta}}{Rl}.$$

Отсюда получаем диаметр зеркала:

$$d = 2r = \frac{2Rl}{L\sqrt{\sin\beta}}\cdot 10^{0.2(m_0 - m)} = 190\text{ м}.$$

Система оценивания:

1 этап (1 балл): определение углового расстояния между Луной и Солнцем на небе на основе данных о находящейся рядом Венере.

Возможная ошибка участника: неправильное истолкование понятия наибольшей элонгации и запись выражения arctg (L_V/L) = 36° или arccos (L_V/L) = 44°. Этап не засчитывается, но последующие оцениваются полностью, в зависимости от их выполнения.

2 этап (2 балла): определение угла между плоскостью зеркала и направлением на наблюдателя. Засчитывается только при правильном определении (половина углового расстояния между Луной и Солнцем).

Возможная ошибка участника: первые два этапа вообще не выполняются, дальнейший анализ проводится исходя из нормального расположения зеркала по отношению к Солнцу и Земле. При отсутствии иных ошибок ответ в задаче около 120 метров. Первые два этапа не оцениваются, также на 1 балл снижается оценка за последний этап, максимальная оценка за решение составляет 6 баллов.

3 этап (4 балла): выражение для яркости отражения Солнца в зеркале. Проще всего его сделать через видимую площадь зеркала, хотя участники могут использовать и другие методы (например, записывать выражения для соответствующих потоков световой энергии, см. ниже). Величину углового радиуса или диаметра Солнца участники могут брать как известную, могут вычислять ее. Уменьшение расстояния до Луны за счет размеров Земли, если Луна находится вблизи зенита, изменяет ответ на 3 метра и не является обязательным для учета.

4 этап (3 балла): определение диаметра зеркала, точность 15 метров. При ошибке в 2 раза, вызванной путаницей понятий радиуса и диаметра, оценка уменьшается на 2 балла.

Альтернативный путь решения (3-4 этапы): расчет производится через энергетические величины. Участник может указать, что количество энергии, отражаемое зеркалом за секунду, есть $F_0\cdot\pi r^2\sin\beta$, где F_0 – плотность энергии от Солнца на расстоянии Земли и Луны. Далее можно указать, что около Земли эта энергия будет распределена по кругу с радиусом $l\rho_0$. Следовательно, плотность потока энергии от зеркала на Земле есть

$$F = F_0\cdot\pi r^2 \sin\beta / \pi l^2\rho_0^2 = F_0\cdot r^2 \sin\beta / l^2\rho_0^2 = F_0\cdot r^2L^2 \sin\beta / l^2R^2,$$

что эквивалентно полученным выше соотношениям и соответствует выполненному второму этапу. Расчет звездных величин аналогичен, весь подход при правильном выполнении оценивается полностью.

10/11.4. МИССИЯ СПАСЕНИЯ II

Условие. В далеком будущем Солнце в ходе своей эволюции будет постепенно увеличивать свою светимость, а температура его поверхности будет уменьшаться. Для сохранения жизни на Земле цивилизация научилась медленно "отодвигать" Землю от Солнца так, чтобы тепловые условия на поверхности нашей планеты оставались постоянными. Вместе с Землей от Солнца отодвигаться будет и Луна, оставаясь на современном расстоянии от Земли (вековое удаление Луны от Земли цивилизация давно остановила, чтобы не удлинялись сутки). При какой эффективной температуре Солнца на Земле прекратятся полные теневые лунные затмения? любые теневые лунные затмения? Парниковые свойства атмосферы и альбедо Земли считать неизменными, орбиты Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли – круговыми. Преломление и рассеяние света Солнца в атмосфере Земли не учитывать.

Решение. Светимость звезды с радиусом R и температурой T есть

$$J = J_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^4,$$

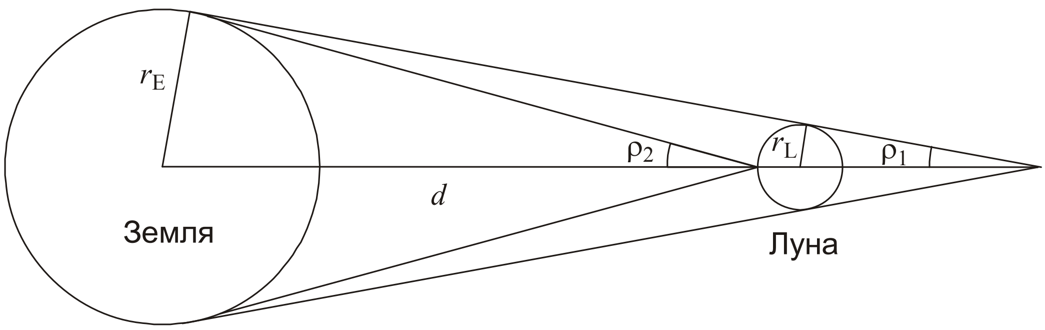
где индекс «0» относится к характеристикам современного Солнца. Поток тепловой энергии на расстоянии L от Солнца будет равен

$$F = \frac{J}{4\pi L^2} = F_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^4\left(\frac{L}{L_0}\right)^{-2}.$$

Здесь L_0 – современное расстояние от Земли до Солнца. Чтобы сохранить тепловой поток на постоянном уровне ($F=F_0$), необходимо выполнить условие:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{R}{R_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2; \quad \rho = \frac{R}{L} = \frac{R_0}{L_0}\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = \rho_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^2.$$

Итак, отодвигать Землю от Солнца нужно таким образом, чтобы видимый радиус Солнца ρ возрастал обратно пропорционально квадрату температуры поверхности Солнца.



Полные лунные затмения прекратятся, когда радиус земной тени на расстоянии Луны сравняется с радиусом Луны r_L. Учитывая, что Солнце значительно дальше, нежели расстояние между Землей и Луной d, угловой радиус Солнца для этого должен быть

$$\rho_1 = \frac{r_E - r_L}{d} = 0.0121 \text{ рад} = 0.69^\circ.$$

Во втором случае тень должна лишь дотянуться до поверхности Луны. Соответствующий угловой радиус Солнца будет равен

$$\rho_2 = \frac{r_E}{d - r_L} = 0.0166 \text{ рад} = 0.95^{\circ}.$$

Учитывая, что в настоящее время эффективная температура Солнца составляет 5800 K, а его видимый радиус 0.00465 радиан, мы получаем выражения для эффективных температур в указанные эпохи:

$$T_{1,2} = T_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{1,2}}}.$$

Температуры получаются равными 3600 и 3100 K соответственно.

Система оценивания:

Этап 1 (2 балла): формирование условия на угловой радиус (диаметр) Солнца либо соотношения его радиуса и расстояния, при котором на Земле будут сохраняться тепловые условия. Данный этап выполняется в общем виде, и участник должен получить корректные соотношения углового радиуса и температуры Солнца.

Этап 2 (6 баллов, 3+3): получение значений либо выражений для углового радиуса (диаметра) Солнца либо расстояния до него для выполнения каждого из двух условий заданий. Участник может учитывать конечное расстояние до Солнца в схеме 1, хотя это не скажется на ответе и вообще не может быть в точности сделано, так как радиус Солнца в точности неизвестен. Учет радиуса Луны в знаменателе для второго случая не является обязательным. Требуемая точность – 5%.

Этап 3 (2 балла): определение температур, точность – 100 K.

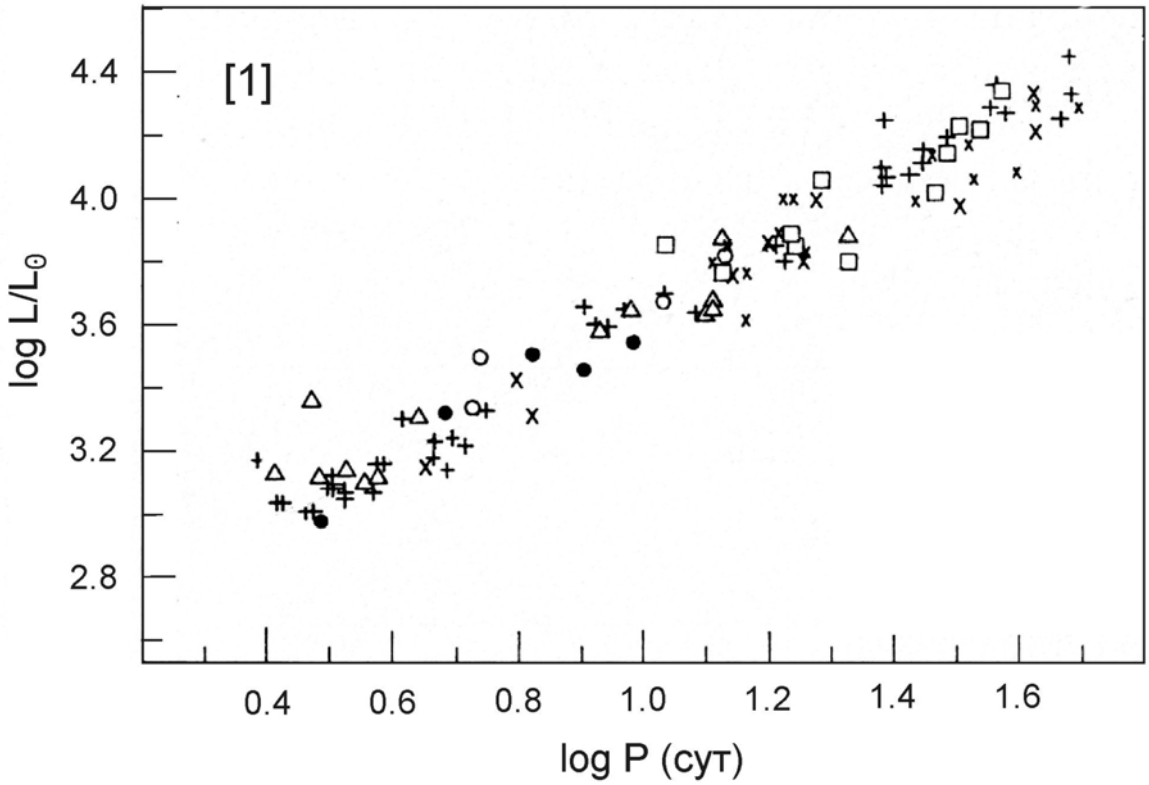
10/11.6. СУДЬБА ЦЕФЕИД

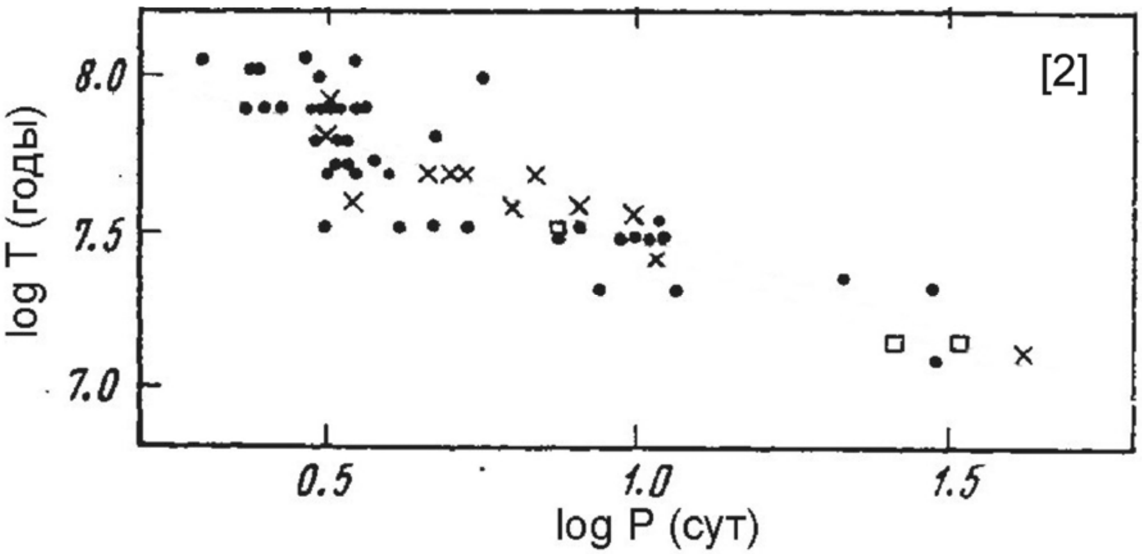
Условие. Перед Вами две диаграммы:
[1] Диаграмма «период – светимость» для некоторых цефеид нашей Галактики, Большого и Малого Магеллановых облаков, Туманности Андромеды и NGC 6822. По осям отложены десятичный логарифм периода в сутках и средний по периоду десятичный логарифм светимости по отношению к Солнцу. Разные значки относятся к разным галактикам, что для решения данной задачи принципиального значения не имеет, свойства цефеид считаются одинаковыми во всех галактиках.
[2] Диаграмма «период – возраст» для цефеид тех же галактик, выборка отличается от [1], логарифмы десятичные.

Исходя из этих диаграмм, выведите связь между абсолютными болометрическими звездными величинами одной и той же звезды на стадии главной последовательности (m_M) и цефеиды (средняя по периоду, m_C). Получите ее в виде линейного соотношения

$$m_C = A \cdot m_M + B,$$

определив коэффициенты A и B. При анализе считать, что все звезды во всех указанных галактиках одиночные, при образовании имеют одинаковый химический состав, время жизни Солнца на главной последовательности равно 10 миллиардам лет. Светимость звезды на главной последовательности L_M считать постоянной во времени и пропорциональной M^4 (M – масса звезды), а все стадии эволюции звезд после главной последовательности – кратковременны.





Решение. Прежде всего, мы должны указать, что производить анализ и выводить соотношения мы можем только для таких характеристик звезд (их масс, светимостей), которые встречаются среди цефеид и для которых есть данные на обоих графиках.

Соотношения в обоих случаях близки к линейным. При этом, возраст цефеид определен ненадежно, что приводит к значительному разбросу экспериментальных данных. В общем случае, аппроксимация набора точек линейной зависимостью требует применения метода наименьших квадратов, приближенный подход может быть выполнен графически. Проведя прямые через точки графиков [1] и [2], мы получаем соотношения:

$$\lg (L_C/L_0) = 3.61 + 1.10 (\lg P - 1).$$
$$\lg T = 7.48 - 0.68 (\lg P - 1).$$

Обратим внимание, что в качестве параметра по оси абсцисс берется не lg P, а (lg P – 1). Это делается, чтобы ноль данного параметра попал в середину интервала наблюдательных данных, что улучшает точность определения свободных параметров данной зависимости. Выражая одно уравнение через второе, связываем светимость цефеиды с ее возрастом:

$$\lg (L_C/L_0) = 3.58 - 1.62\ (\lg T - 7.5) = 15.73 - 1.62 \lg \mathrm{T}. \qquad (*)$$

Как известно, цефеиды представляют собой желтые сверхгиганты, уже не находящиеся на главной последовательности. С учетом того, что мы считаем поздние этапы эволюции звезд кратковременными, указанный возраст цефеиды – это примерно то время, что она провела на главной последовательности. По условию мы предполагаем, что светимость звезды на главной последовательности пропорциональна ее массе в четвертой степени, то есть

$$\lg (L_M/L_0) = 4 \lg (M/M_0).$$

В этом случае время, которое звезда может провести на главной последовательности, есть

$$T = T_0\ ((M/M_0)\ /(L_M/L_0));$$

$$\lg T = \lg T_0\ + \lg (M/M_0) - \lg (L_M/L_0) = 10 - 0.75 \lg (L_M/L_0).$$

Подставляем это соотношение в формулу (*):

$$\lg (L_C/L_0) = 1.2 \lg (L_M/L_0) - 0.45.$$

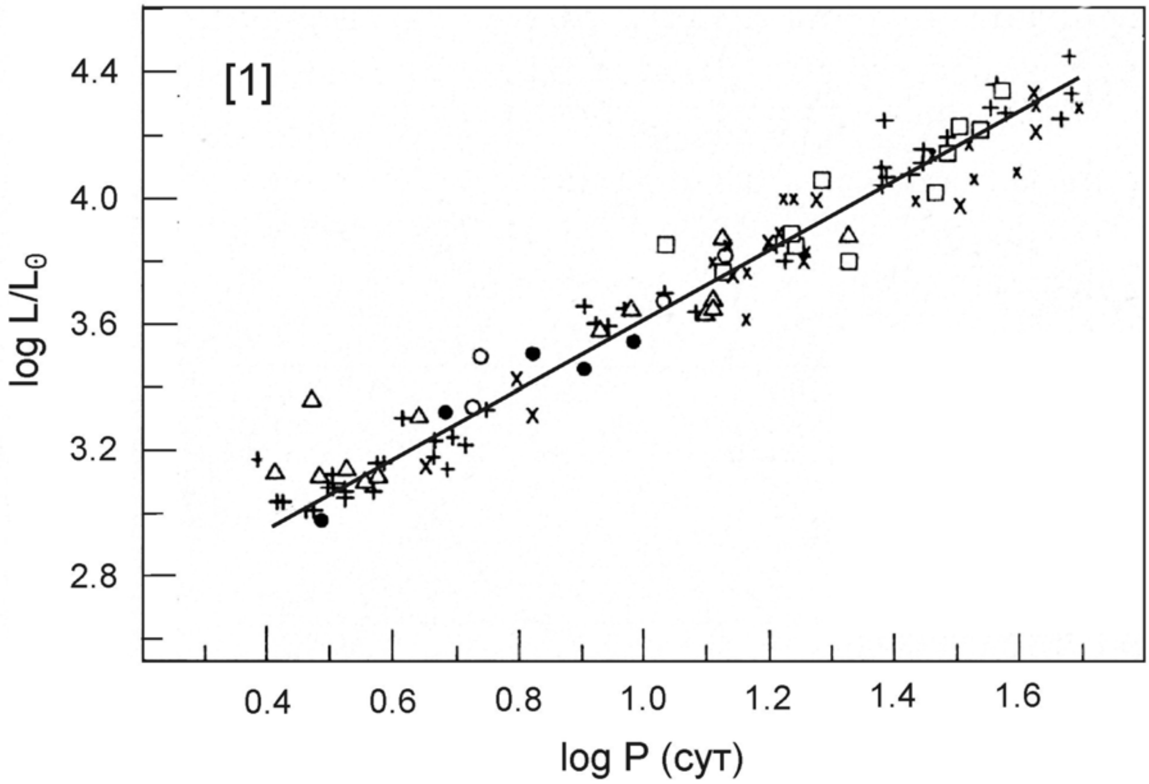
Мы получили соотношение светимостей звезды на разных стадиях эволюции. Для их перевода в абсолютные звездные величины воспользуемся формулой Погсона:

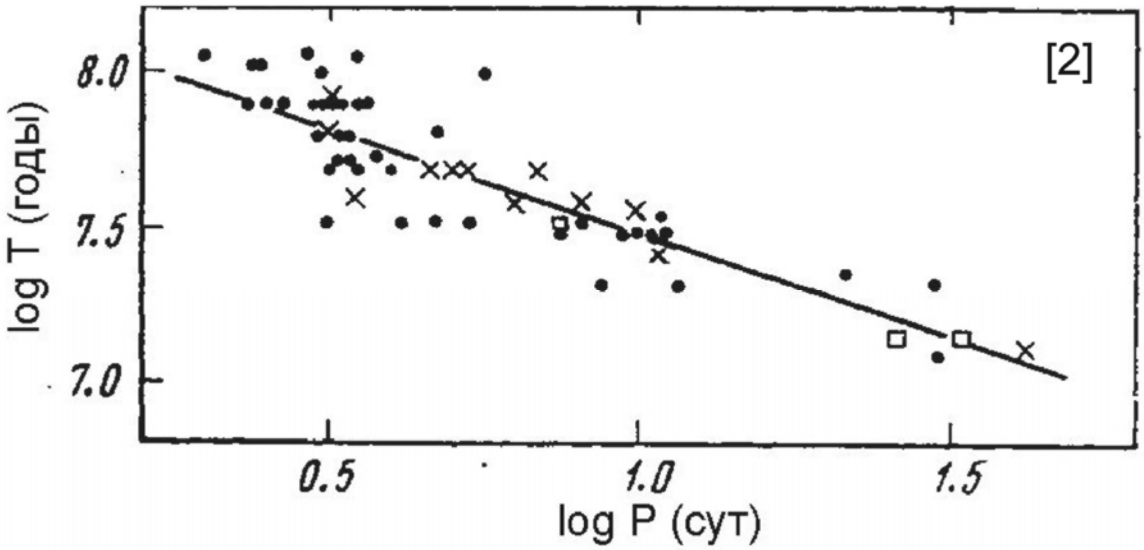
$$\lg (L_{M,C}/L_0) = 0.4\ (m_0 - m_{M,C})$$

Здесь m_0 – абсолютная болометрическая величина Солнца (+4.72). Имеем:

$$m_C = 1.2\ m_M + 0.2.$$

Мы получили ответ на вопрос задачи. Для типичных цефеид с абсолютной звездной величиной m_C=–4.0 мы получаем, что на стадии главной последовательности их абсолютная звездная величина составляла m_M=–3.5, то есть в ходе своей эволюции эти звезды мало изменили свою светимость. Это типично для звезд-сверхгигантов, коими являются цефеиды, их эволюционные треки на диаграмме Герцшпрунга-Рассела близки к горизонтальным.





Источники данных:

[1] Sandage, A., Tammann, G.A., 1968. A composite period-luminosity relation for cepheids at mean and maximum light // Astrophysical Journal, v.151, p.531.

[2] Ефремов Ю.Н., 1978. Соотношение период–возраст для цефеид // Астрономический журнал, т. 55, стр. 272.

Система оценивания.

1-2 этапы (2+2 балла): анализ графиков, восстановление параметров линейной зависимости логарифма светимости и возраста цефеиды от логарифма периода. Участник может делать это численно (метод наименьших квадратов) или графически. Оценка определяется точностью восстановленных параметров, однако при этом жюри нужно принимать во внимание, что нуль логарифма периода выходит за диапазон наблюдательных данных. Если участник находит параметры зависимости $\lg J$ и $\lg T$ от $\lg P$, а не ($\lg P - 1$), то погрешность свободного параметра может быть большей, и это не является основанием для снижения оценки.

Исходя из этого, необходимо оценивать точность не самих параметров линейной аппроксимации диаграмм [1-2], а величин светимости и возраста цефеид, получаемых из полученных участником зависимостей, для рабочего диапазона $\lg P$ (от 0.5 до 1.5). Их точность на всем диапазоне не должна быть хуже 0.1 для диаграммы [1] и 0.2 для диаграммы [2]. В противном случае оценка за этап уменьшается с 2 до 1 балла, при двукратном превышении погрешности – до 0 баллов, но без влияния на последующие этапы.

3 этап (2 балла). Связь светимости цефеиды с ее возрастом на основе совмещения результатов обработки обоих графиков. Может выполняться в общем или численном виде. При проверке жюри должно учитывать, что экспериментальные зависимости могут быть получены с погрешностями, и они не влияют на оценку на данном конкретном этапе. Однако, сам пересчет, выполняемый здесь, не должен вносить дополнительных погрешностей более 0.05 по $\lg L$ и $\lg T$.

4 этап (1 балл). Связь возраста цефеиды с ее светимостью на главной последовательности на основе соотношения «масса-светимость». Ввиду простого соотношения $L{\sim}M^4$, предполагаемого в задании, и округленной величины времени жизни Солнца на главной последовательности (10^{10} лет) – эта зависимость должна быть выражена без погрешностей: $\lg T = 10 - 0.75 \lg L/L_0$, хотя форма ее подачи может отличаться от данной записи.

5 этап (1 балл). Связь светимостей звезды на стадии цефеиды и на стадии главной последовательности. Аналогично третьему этапу, эти вычисления не должны вносить дополнительной погрешности более 0.05 по логарифму светимости.

6 этап (2 балла). Применение формулы Погсона и восстановление связи абсолютных звездных величин на разных стадиях жизни звезды. Этап оценивается при выполнении двух условий: отсутствие дополнительных погрешностей более 0.10 по звездным величинам и физическая адекватность ответа. В частности, коэффициент при звездной величине m_{M} (коэффициент A в условии задачи) должен попадать в интервал от 1.0 до 1.4.

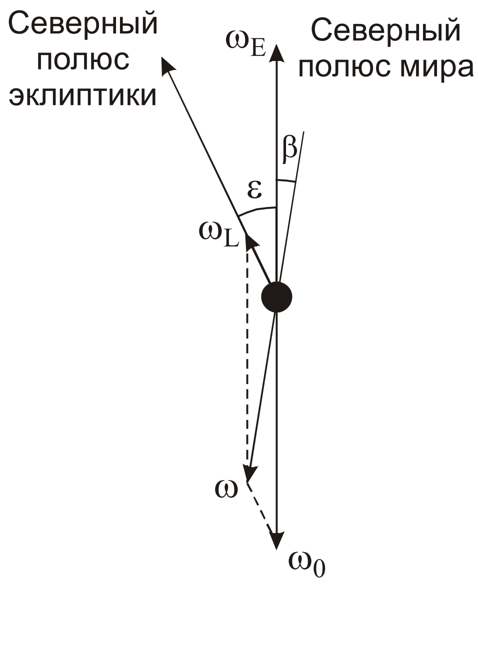
Погрешность свободного коэффициента сама по себе может быть высокой, так как абсолютные звездные величины цефеиды отличны от нуля. В результате, небольшая погрешность в коэффициенте A может сильно изменить свободный коэффициент B. Поэтому вместо самого коэффициента B нужно проверять значения абсолютной величины цефеиды m_{C}, соответствующие абсолютным звездным величинам на главной последовательности m_{M} в интервале от -2^{m} до -5^{m}. Они не должны отличаться от данных полученной выше формулы (-2.2^{m} и -5.8^{m} соответственно) не более, чем на 0.4^{m}. В противном случае оценка за этап уменьшается на 1 балл, при двукратном превышении допустимой погрешности – на 2 балла.

11.1. ЛУННЫЙ ТЕЛЕСКОП

Условие. В северном полушарии Земли установлен телескоп с одноосным часовым механизмом, имеющим специальный режим для гидирования Луны. В этом режиме угловая скорость вращения телескопа вокруг оси отличается от угловой скорости осевого вращения Земли, а сама ось перед непосредственными наблюдениями отклоняется от Северного полюса мира в точку неба с некоторыми экваториальными координатами, фиксированными для этого режима. Найдите эти координаты проекции оси на небе (α, δ) и угловую скорость вращения телескопа (в градусах в час), которые обеспечат наилучшую точность ведения для любого положения Луны на небе и орбите. Считать орбиту Луны круговой и лежащей в плоскости эклиптики, эффектами суточного параллакса Луны и рефракцией пренебречь.

Решение. Если бы Луна не перемещалась на небе относительно далеких звезд, то для ее наблюдений был бы эффективен тот же режим, что и для наблюдений звезд: телескоп вращается относительно полярной оси с угловой скоростью $\omega_0 = -\omega_E$, где ω_E – угловая скорость суточного вращения Земли. Обратим внимание, что угловая скорость ω_0 отрицательна, то есть в северном полушарии Земли вращение телескопа происходит по часовой стрелке. Однако, Луна перемещается относительно звезд с угловой скоростью ω_L. Если бы ее движение происходило вдоль небесного экватора, то для наблюдений было бы достаточно сделать угловую скорость вращения телескопа равной $\omega_0 + \omega_L = \omega_L - \omega_E$. Такая схема реализуется в виде «лунной скорости» ведения на некоторых телескопах. Однако, Луна движется в ином направлении, и при режиме «лунной скорости» необходимы также коррекции вдоль круга склонения.

Однако, если считать, что орбитальное движение Луны происходит равномерно по какому-либо фиксированному большому кругу небесной сферы (мы можем так считать, исходя из условия задачи), и оба вращения происходят вокруг наблюдателя (параллаксом Луны мы пренебрегаем по условию задачи), то мы можем использовать аналогичную схему, только теперь угловые скорости нужно рассматривать как векторные величины.



Для любого фиксированного момента времени перемещение Луны по небу относительно наблюдателя на поверхности Земли есть сложение видимого вращения небесной сферы (ω_0), вектор направлен к южному полюсу мира, и орбитального вращения Луны (ω_L), вектор направлен к северному полюсу эклиптики. Для модуля вектора результирующей угловой скорости имеем:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2 - 2\omega_0\omega_L \cos\varepsilon}\,.$$

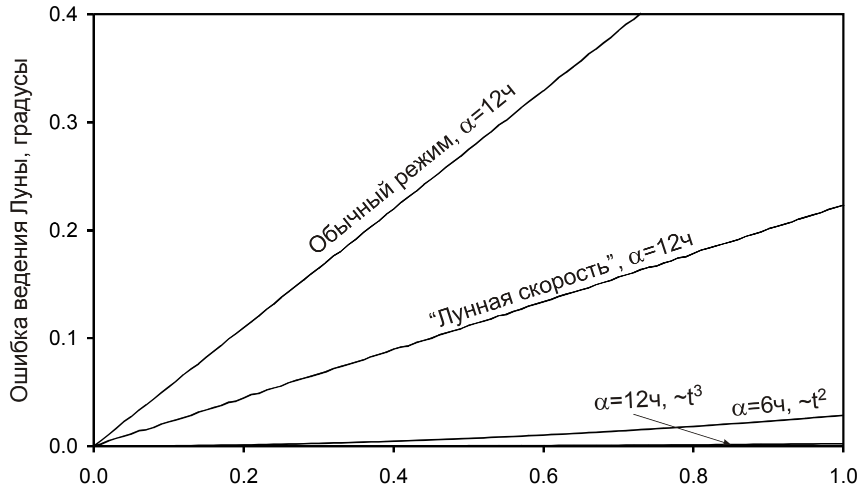
Модуль угловой скорости ω_0 равен 360° за звездные сутки, то есть 15.041°/час. Угловая скорость ω_L равна 360° за сидерический период Луны или 0.549°/час, угол ε есть наклон экватора к эклиптике. В итоге мы получаем требуемое значение угловой скорости: 14.539°/час.

Чтобы определить координаты проекции оси на небе, обратим внимание, что эта ось находится в одной плоскости с осью мира и осью эклиптики, но наклонена к оси мира в сторону, противоположную наклону оси эклиптики. Соответствующий угол β мы можем определить из теоремы синусов:

$$\frac{\sin\beta}{\omega_L} = \frac{\sin\varepsilon}{\omega},$$

откуда β = 51.7′. Вектор угловой скорости телескопа направлен в южное небесное полушарие, в точку с координатами α = 18ч ровно, δ = –89°08′. Эти координаты можно записать в виде ответа, хотя более логичным было бы указать в качестве проекции оси противоположную точку неба: α = 06ч ровно, δ = +89°08′, коль скоро мы находимся в северном полушарии. Интересно, что эта точка оказывается на небе чуть ближе к Полярной звезде, чем сам полюс мира. Мы получили ответ на оба вопроса задания.

Теоретически, при выполнении условия задачи подобный подход обеспечил бы равенство мгновенных угловых скоростей Луны и телескопа по модулю и направлению, вне зависимости от положения Луны на орбите и звездного времени в пункте наблюдения, и практически идеальное ведение в начале наблюдений. На графике показана зависимость ошибки ведения телескопа от времени по Луне при обычной работе часового механизма, «лунной скорости» и описанного выше метода, в последнем случае – для двух положений Луны. В первых двух случаях ошибка растет линейно со временем t, а в последнем – пропорционально t^2 или даже t^3.



В конечном итоге точность ведения ухудшается, так как путь Луны не является большим либо малым кругом небесной сферы, и точка (α, δ), к которой направлена ось телескопа, сама медленно смещается в ходе суточного движения небесной сферы. Тем не менее, на интервале времени до часа мы получаем более чем 10-кратный выигрыш по точности при Луне вблизи точек солнцестояний и 100-кратный – вблизи точек равноденствий. В реальных условиях точность была бы также ограничена эллиптичностью орбиты Луны и ее наклоном к плоскости эклиптики, хотя эти факторы можно учесть соответствующим изменением угловой скорости и координат проекции оси.

Система оценивания. Решения данного задания в исполнении участников могут существенно отличаться друг от друга и от приведенного выше решения, что совершенно не означает их неправильность. Участники могут не оперировать векторами угловых скоростей и пользоваться иными способами поиска точки проекции оси на небесную сферу. В частности, можно брать четыре основных положения Луны на эклиптике (точки равноденствий и солнцестояний), строить большие круги небесной сферы, перпендикулярные пути движения Луны по небесной сфере в этих точках, и искать точку пересечения больших кругов. При правильном исполнении и ответе, который в этом случае должен получиться таким же, такое решение оценивается полностью.

Решение разделяется на два основных этапа, связанные с поиском величины и направления угловой скорости:

1 этап (5 баллов) – поиск величины угловой скорости вращения телескопа. Оценка определяется правильности модели и учетом всех факторов:
a) Угловая скорость просто приравнивается к 15° в час – этап не засчитывается;
b) Учитывается разница солнечных и звездных суток, угловая скорость 15.041° в час – 1 балл;
c) Учитывается движение Луны по орбите, которое считается просто противоположным суточному вращению небесной сферы, причем последнее считается равным 15° в час. Ответ составляет 14.451°. Оценка за этап – 2 балла, если берется правильный период обращения Луны – сидерический, в противном случае оценка уменьшается на 1 балл;
d) То же, но учитывается разность звездных и средних солнечных суток, угловая скорость вращения небесной сферы составляет 15.041°, итоговый ответ 14.492°. Оценка за этап – 3 балла, если берется правильный период обращения Луны – сидерический, в противном случае оценка уменьшается на 1 балл;
e) Решение с учетом разных осей вращения Луны и небесной сферы, при котором ответ совпадает с правильным с требуемой точностью не хуже 0.02° в час. При ошибках, связанных с неверным сложением векторов (неправильный учет угла между ними и т.д.) оценка уменьшается до 4 баллов при итоговой погрешности 0.02-0.04° в час, до 3 баллов – при погрешности не более 0.04-0.1° в час (фактически, эквивалентно погрешностям описанных выше неточных подходов).

Если участник записывает ответ с недостаточным количеством значащих цифр, что может вывести его за рамки допустимых погрешностей, членам жюри необходимо уточнить его на основе тех выкладок, что делались участником для получения этого ответа, что и определяет оценку.

2 этап (5 баллов) – нахождение координат проекции оси на небесную сферу. Участник может приводить координаты как северной, так и южной проекции, что эквивалентно в плане оценивания:
a) Северный или южный полюс эклиптики, что означает погрешность более 24° – этап не засчитывается;

b) Северный или южный полюс мира – оценка 1 балл.
c) Попытка вычислить координаты точки оси на основе суперпозиции угловых скоростей, при которой ошибка определения превосходит 2° – оценка 2 балла.
d) Правильное угловое расстояние оси от полюса мира (порядка 1°), но неверно указано направление отклонения (например, 6ч, –89° или 18ч, +89°) – оценка 3 балла.
e) Правильный подход и верный ответ с точностью до 0.2° (в частности, 6ч, +89° или 18ч, –89°) – оценка 5 баллов, при отклонениях до 0.5° – оценка 4 балла.

Возможное ошибочное решение: вместо векторов ω_0 и ω_L участник складывает вектора ω_E (противоположный ω_0) и ω_L, то есть путает направления вращения Земли и вращения небесной сферы. При правильном математическом исполнении участник в этом случае получит значение угловой скорости вращения телескопа 15.546°/час, а координаты оси: α = 18ч, δ = +89°12′ – обратим внимание, что ось в этом случае оказывается с другой стороны от Северного полюса мира. При таком решении за первый этап выставляется 2 балла, за второй этап – 3 балла (вариант d, описанный выше), максимум за все решение – 5 баллов.

11.2. МАРСИАНСКИЙ АСТРОКЛИМАТ

Условие. Для постройки оптической обсерватории на Марсе ученые реализовали проект по очистке атмосферы от пылевых и ледяных частиц, сохранив только ее газовую составляющую. Обсерватория строится в тропической зоне Марса на нулевой высоте, атмосферное давление там составляет 0.006 атм. Астрономические наблюдения предполагаются даже днем. Оцените среднюю по небесной полусфере яркость марсианского фона неба (в звездных величинах с квадратной угловой секунды) днем, когда Солнце располагается вблизи зенита. Известно, что рассеяние света углекислым газом в расчете на одну молекулу в 2.4 раза сильнее, чем земным воздухом, а вертикальная оптическая толщина азотно-кислородной атмосферы Земли в видимых лучах на уровне моря равна 0.10. Рассеяние света считать изотропным.

Решение. Для решения задачи нам нужно определить вертикальную оптическую толщину газовой (углекислой) атмосферы Марса, сравнивая ее с земной. Атмосферное давление на поверхности планеты есть

$$p = m_{\mathrm{S}} g = \frac{N_{\mathrm{S}} \mu\, g}{N_{\mathrm{A}}}.$$

Здесь m_{S} и N_{S} – масса и количество молекул в столбе атмосферы единичной площади, g – ускорение свободного падения на поверхности планеты, μ – молярная масса, N_{A} – число Авогадро. Сравнивая давления на Марсе (индекс «M») и Земле (индекс «E»), имеем:

$$\frac{p_{\mathrm{M}}}{p_{\mathrm{E}}} = \frac{N_{\mathrm{SM}}}{N_{\mathrm{SE}}} \cdot \frac{\mu_{\mathrm{M}}}{\mu_{\mathrm{E}}} \cdot \frac{g_{\mathrm{M}}}{g_{\mathrm{E}}}.$$

Соотношение вертикальных оптических толщин газовых составляющих на Марсе и Земле есть

$$\frac{\tau_{\mathrm{M}}}{\tau_{\mathrm{E}}} = \frac{N_{\mathrm{SM}}}{N_{\mathrm{SE}}} \cdot \frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_{\mathrm{E}}} = \frac{p_{\mathrm{M}}}{p_{\mathrm{E}}} \cdot \frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_{\mathrm{E}}} \cdot \frac{\mu_{\mathrm{E}}}{\mu_{\mathrm{M}}} \cdot \frac{g_{\mathrm{E}}}{g_{\mathrm{M}}}.$$

Отношение давлений $p_{\mathrm{M}}/p_{\mathrm{E}}$ по условию задачи есть 0.006, отношение коэффициентов (сечений) рассеяния на одну молекулу $\sigma_{\mathrm{M}}/\sigma_{\mathrm{E}}$ равно 2.4, отношение молярных масс (или молекулярных весов) $\mu_{\mathrm{E}}/\mu_{\mathrm{M}}$ есть 29/44. Наконец, отношение ускорений свободного падения, как можно вычислить из радиусов и масс планет, есть 2.64. В итоге, мы получаем значение вертикальной оптической толщины газовой атмосферы на нулевой высоте на Марсе:

$$\tau_{\mathrm{M}} = 0.0025.$$

Если Солнце находится вблизи зенита, а оптическая толщина много меньше единицы, то для определения средней яркости неба можно воспользоваться упрощением: считать, что рассеянное по вертикальному пути излучение Солнца наполовину отражается в космос, а вторая половина формирует свечение всей небесной полусферы. В этом случае суммарная звездная величина полусферы есть

$$m_{\mathrm{HM}} = m_{\mathrm{SM}} - 2.5 \lg (\tau_{\mathrm{M}}/2) = m_{\mathrm{SE}} + 5 \lg d - 2.5 \lg (\tau_{\mathrm{M}}/2) = -18.6.$$

Здесь m_{SM} и m_{SE} – видимая звездная величина Солнца при наблюдении с Марса и Земли соответственно, d – среднее расстояние от Солнца до Марса в астрономических единицах. Звездная величина фона с квадратной секунды ($1/206265^2$ стерадиан) вычисляется из звездной величины полусферы (2π стерадиан):

$$m('')_M = m_{HM} + 2.5 \lg (2\pi) + 5 \lg 206265 = 10.$$

Мы получили ответ на вопрос задачи. В качестве дополнения отметим, что такой же подход к Земле дает звездную величину дневного неба с квадратной секунды: $m('')_E = 5$. Если учесть, что $1''$ – это характерная разрешающая способность не самых больших телескопов, то полученные звездные величины будут примерно характеризовать их проницающую способность днем при небольших временах накопления сигнала. Она может быть еще улучшена для больших телескопов с длительными экспозициями. Тем самым, при хороших атмосферных условиях некоторые астрономические наблюдения вполне можно было бы проводить на Марсе днем. Если же говорить о невооруженном глазе с разрешением $1'$, то звездные величины с такой площади неба на Земле и Марсе оказываются равными -4^m и $+1^m$ соответственно, то есть на Земле мы можем видеть глазом днем только Венеру, а на Марсе при чистой атмосфере смогли бы наблюдать самые яркие звезды.

Система оценивания. Решение задания условно разбивается на два этапа, в каждом из которых участник должен учесть ряд факторов, различающихся на Земле и Марсе, и окончательного вывода. Пропуск или некорректный учет одного фактора приводит к снятию баллов, связанных с данным конкретным фактором, но не влияет на другие составляющие оценки. И только если совокупность ошибок выводит окончательный ответ за указанные далее рамки, не выставляются баллы за окончательный ответ.

Этап 1 (5 баллов) – определение вертикальной оптической толщины газовой атмосферы на Марсе:
Фактор 1 – разность давлений на Земле и Марсе (1 балл);
Фактор 2 – разность молекулярного веса атмосферы на Земле и Марсе (1 балл);
Фактор 3 – разность сечения рассеяния на одну молекулу на Земле и Марса (1 балл);
Фактор 4 – разность ускорения силы тяжести на Земле и Марсе (2 балла).

Если все факторы учтены физически корректно, но итоговая оптическая толщина получилась ошибочной из-за неверных вычислений, общая оценка уменьшается на 1 балл при ошибке от 1.3 до 2 раз, на 2 балла при ошибке от 2 до 4 раз, на 3 балла при большей ошибке. При наличии пропущенных или некорректно учтенных факторов ответ нужно сравнивать с тем, что получился бы при данных физических недочетах с правильным вычслением.

Этап 2 (5 баллов) – вычисление звездной величины фона неба на Марсе с угловой секунды. Участники могут предлагать свои подходы к приближенному решению задачи, которые должны оцениваться исходя из своей обоснованности и корректности результата. Общая схема оценивания этапа следующая:

Фактор 1 – правильная видимая звездная величина Солнца с учетом большего расстояния Марса (2 балла);
Фактор 2 – учет ухода части излучения в космическое пространство (2 балла);
Заключительный расчет – 1 балл. Данный балл выставляется при соблюдении двух условий: правильных вычислений собственно звездной величины на основе выражения, составленного участником на предыдущих этапах (оно может быть само по себе неточным) и допустимой погрешности по сравнению с правильным ответом (не более $\pm 2^m$, вне зависимости от причины погрешности).

11.3. МИССИЯ СПАСЕНИЯ I

Условие. Астрономы открыли астероид, движущийся в плоскости эклиптики. Большая полуось орбиты оказалась равна 1.200 а.е., ее эксцентриситет 0.200. Радиус астероида был равен 400 метрам, и его дальнейшие наблюдения показали, что он представляет серьезную опасность для Земли. Чтобы ни сам астероид, ни его крупные осколки не упали на Землю, на астероид доставили несколько мощных ядерных зарядов. В момент, когда он располагался в перигелии своей орбиты, их одновременно подорвали. Астероид был полностью разрушен, превратившись в шарообразное облако мелких пылинок, однородно распределенных внутри объема шара. Ровно через сутки после взрыва облако пылинок совпало по положению на небе и видимым с Земли размерам с Солнцем, ослабив его яркость в центре диска на 10%. Было известно, что:

1) Заряды были расположены на астероиде симметрично, что обеспечило изотропный взрыв, при котором центр масс астероида не изменил свою скорость;
2) Плотность астероида и его осколков составляла 2 г/см^3, пылинки сферические и черные. Вся изначальная масса астероида содержалась в пылинках, причем мелких пылинок было больше, чем крупных: количество пылинок с радиусами от r до $r + \Delta r$ ($\Delta r \ll r$) пропорционально $\Delta r/r^2$, где $0 < r < r_M$. Это свойство одинаково во всех частях облака.

Определите:
1) Максимальный радиус пылинок r_M;
2) Долю массы астероида, которая в итоге покинет Солнечную систему.

Взаимодействием пылинок с планетами (в том числе с Землей) пренебречь. Волновые эффекты при взаимодействии пылинок с излучением не учитывать, считая, что они задерживают свет по законам геометрической оптики. Орбиту Земли считать круговой.

Решение. По условию задачи, в момент взрыва астероид находился в точке перигелия орбиты. Его расстояние от Солнца составляет

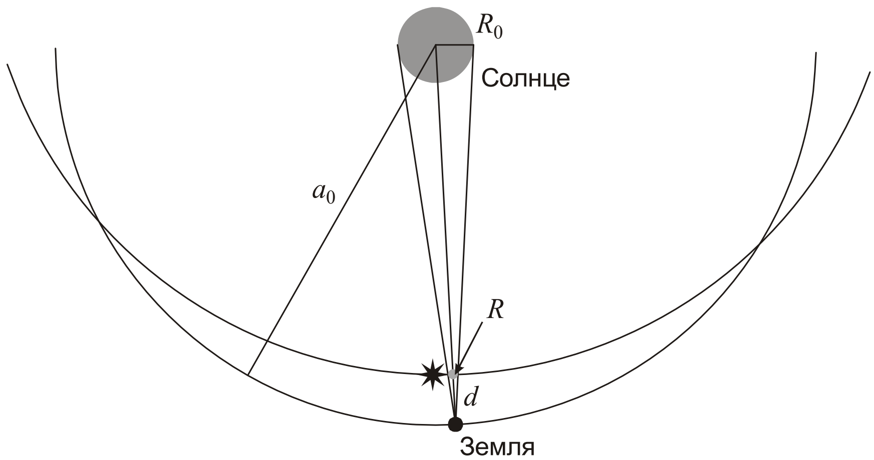
$$p = a\,(1 - e) = 0.960 \text{ а.е.}$$

Здесь a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты астероида. Это расстояние существенно не изменяется за одни сутки, поэтому мы можем считать, что во время последующего «затмения» оно было таким же. Коль скоро орбита Земли круговая, а осколки астероида оказались между Солнцем и Землей, мы заключаем, что расстояние от Земли до центра роя частиц составляло

$$d = a_0 - p = 0.040 \text{ а.е.}$$

Здесь a_0 – радиус орбиты Земли (1 а.е.). Облако сравнялось с Солнцем (радиус R_0) по угловым размерам, отсюда мы получаем радиус облака через сутки после взрыва:

$$R = R_0\, d / a_0 = 28000 \text{ км.}$$



Такого радиуса облако достигло через t = 1 сутки после взрыва, отсюда мы получаем максимальную скорость разлета осколков при взрыве:

$$V = R \,/\, t = 0.32 \text{ км/с}.$$

Обратим внимание, что эта скорость невелика и сама по себе заведомо недостаточна, чтобы отправить хоть часть осколков на параболическую орбиту. Действительно, скорость астероида перед взрывом составляла

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{p}(1+e)} = v_0\sqrt{\frac{a_0}{p}(1+e)} = 33.3 \text{ км/с},$$

здесь v_0 – орбитальная скорость Земли (29.8 км/с). Для ухода на параболическую орбиту потребовалась бы скорость

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{p}} = v_0\sqrt{\frac{2a_0}{p}} = 43.0 \text{ км/с},$$

то есть понадобилось бы в 30 раз большее приращение скорости даже для тех частиц, что полетели бы «вперед» по отношению к орбитальному вращению астероида.

Рассмотрим момент «затмения» Солнца роем осколков, которое происходит через сутки после взрыва. Пусть концентрация осколков с радиусами от r до $r+\Delta r$ в это время составляет

$$\Delta n(r) = \frac{n_0}{r^2}\Delta r.$$

Здесь n_0 – некоторая постоянная величина с размерностью [м$^{-2}$]. Когда центр роя на небе совпадает с центром Солнца на небе, луч Солнца проходит путь в $2R$ через рой. Число частиц с размером от r до $r+\Delta r$ на луче зрения будет равно

$$\Delta n_L = 2R \cdot \Delta n(r) \cdot \pi r^2 = 2\pi R n_0 \Delta r.$$

Обратим внимание, что эта величина не зависит от радиуса частиц. Таким образом, полное число частиц с размерами от нуля до r_M на пути излучения Солнца есть

$$n_L = 2\pi R n_0 \cdot r_M = \tau_0. \qquad (*)$$

Мы получили выражение для τ_0 – оптической толщины облака по диаметру. В соответствии с условием задачи, мы можем с высокой точностью считать ее равной 0.1. Это уравнение пока не дает нам сразу определить величину $r_\text{М}$, так как мы не знаем константу n_0. Чтобы найти ее, запишем выражение для полного числа частиц роя с размерами от r до $r+\Delta r$:

$$\Delta N(r) = \frac{4\pi n_0}{3r^2} R^3 \Delta r.$$

Суммарный объем таких частиц составит

$$\Delta V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta N(r) = \frac{16\pi^2 n_0}{9} R^3 r \Delta r.$$

По условию задачи, вся масса астероида в итоге оказалась в пылинках, при этом не менялась плотность. Поэтому суммарный объем пылинок равен изначальному объему астероида:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_\text{А}^3 = \frac{16\pi^2 R^3 n_0}{9} \int_0^{r_\text{М}} r\,dr = \frac{8\pi^2 R^3 n_0 r_\text{М}^2}{9}; \quad R_A^3 = \frac{2\pi R^3 n_0 r_\text{М}^2}{3}.$$

Подставляя выражение для n_0 из уравнения (*), имеем:

$$R_\text{А}^3 = \frac{2\pi R^3 r_\text{М}^2}{3} \cdot \frac{\tau_0}{2\pi R \cdot r_M} = \frac{R^2 \tau_0 r_\text{М}}{3}.$$

В итоге,

$$r_\text{М} = \frac{3R_\text{А}^3}{R^2 \tau_0} = 2.4 \cdot 10^{-6}\,\text{м}.$$

Как мы показали ранее, изменение скорости пылинок во время взрыва фактически не повлияет на их возможность покинуть Солнечную систему. Зато самым мелким из них это позволит сделать световое давление Солнца. Его сила для пылинки радиуса r равна

$$F_\text{L} = \frac{J_0 \cdot \pi r^2}{4\pi p^2 c}.$$

Здесь J_0 – светимость Солнца. Мы учитываем, что пылинка черная и свет не отражает. Отношение силы светового давления к силе притяжения есть

$$\frac{F_\text{L}}{F_\text{G}} = \frac{J_0 \cdot r^2}{4 p^2 c} \cdot \frac{p^2}{GMm} = \frac{3J_0}{16\pi G M c \rho r}.$$

Определим радиус частицы, для которых эти силы совпадают по модулю:

$$r_0 = \frac{3J_0}{16\pi G M c \rho} = 2.9 \cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Движение пылинки радиуса r можно рассматривать как ее движение в поле только силы тяжести, но с массой центрального тела, равной $M^* = M(1 - r_0/r)$. Рассмотрим, в каком случае перигелийная скорость астероида на данном расстоянии от Солнца стала бы параболической:

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{p}(1+e)} = \sqrt{\frac{2GM}{p}(1-\frac{r_0}{r_T})};$$

$$r_T = \frac{2r_0}{1-e} = 7.2 \cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Солнечную систему покинут пылинки с радиусом, меньшим r_T. Как мы уже замечали раньше, при указанном распределении частиц по размерам суммарная масса частиц с радиусом, меньшим r, пропорциональна r^2. Таким образом, мы получаем долю массы астероида, которой предстоит покинуть Солнечную систему:

$$\eta = \frac{r_T^2}{r_M^2} = 0.09.$$

Система оценивания:

1 этап (1 балл): определение радиуса или диаметра пылевого облака в момент прохождения перед Солнцем. Может выполняться в общем или численном виде, в последнем случае оценка радиуса должна иметь погрешность не хуже 500 км. В случае ошибочного выполнения данного этапа (например, в результате неправильного понимания взаимной конфигурации Солнца, Земли и облака или характеристик орбиты) с получением неверного значения радиуса данный этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере на основе того значения радиуса, что получил участник (жюри должно подставить это значение в последующие формулы для проверки). Исключение составляют случаи, когда участник получил заведомо неверное значение радиуса облака, делающее выполнение следующих этапов невозможными.

2 этап (1 балл): Указание, что приращения скорости, полученные пылинками при взрыве, не влияют на их возможность покинуть Солнечную систему. Для этого достаточно указать, что приращение скорости много меньше самой скорости, точное вычисление параболической скорости на данном этапе не является обязательным. Данный этап может выполняться после этапа 3, перед вычислением массовой доли облака, покидающей Солнечную систему.

3 этап (5 баллов): вычисление максимального радиуса пылинки. Для этого участник должен получить правильное выражение для оптической толщины облака по диаметру (2 балла) и суммарного объема пылинок (2 балла). Окончательное вычисление r_M оценивается еще в 1 балл. На первом из этих этапов участник может пойти по упрощенной схеме, считая оптическую толщину однородной по всей видимой площади облака и определяя суммарную видимую площадь пылинок. В этом случае коэффициент 2 в уравнении (*) сменится на 4/3, и итоговое значение r_M увеличится в полтора раза. При таком подходе за этап выставляется 4 балла, остальные оцениваются в полной мере.

Точность оценки, необходимая для полного оценивания этапа, составляет 20%. Ошибочное значение r_M, полученное на данном этапе, не является основанием для снижения оценки за следующий этап, если только оно не приводит к полному выносу частиц световым давлением. В последнем случае при правильных вычислениях и результате 100% последующий этап оценивается из 2 баллов.

4 этап (3 балла). Определение массовой доли вещества астероида, которое должно покинуть Солнечную систему. Расчет должен вестись на основе светового давления, так как небольшое изменение скорости при взрыве совсем незначительно увеличивает вынос частиц, двигающихся вперед по отношению к центра масс, но в той же степени уменьшает вынос частиц, отстающих от центра масс. Участники могут использовать модель «приведенной массы», могут вести вычисления с учетом двух сил в общем виде. Требуемая точность оценки без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах, составляет 10%.

Вероятная ошибка участника при выполнении этапа: предположение, что для выброса частицы из Солнечной системы сила светового давления должна уравнять гравитацию ($r_T = r_0$), что уменьшает граничный радиус в 2.5 раза, а итоговую долю – в 6.25 раз. В этом случае оценка за этап не превышает 1 балл.

Вероятная ошибка участника при выполнении этапа: опускание фактора перигелия орбиты и указание, что граничный радиус r_T есть $2r_0$. Это уменьшает граничный радиус в 1.25 раза, а итоговую долю – в 1.6 раз. Оценка за этап не превышает 2 баллов.

11.5. ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

Условие. На графике представлена кривая вращения некоторой галактики (зависимость круговой скорости звезд от их расстояния от центра галактики). Считая, что подавляющая часть массы галактики представлена темной материей в сферически-симметричном гало, определите, на каком расстоянии от центра ее плотность становится в 10 раз меньше центральной.

Решение. На рисунке представлена некая идеализированная кривая вращения, тем не менее, похожая на то, что наблюдается в некоторых галактиках. Во внутренней части галактики круговая скорость v линейно растет с расстоянием r. Можно легко показать, что такое имеет место в случае постоянной плотности ρ_0 в центральной части галактики. Действительно,

$$v = \sqrt{\frac{Gm(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 r^3}{3r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{3}} \cdot r.$$

Здесь $m(r)$ – масса части галактики внутри сферы с радиусом r. При подстановке радиуса r_0 скорость оказывается равной v_0, отсюда мы находим центральную плотность галактики:

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi G} \cdot \left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2.$$

На расстояниях, больших r_0, скорость остается постоянной и равной v_0, то есть

$$m(r) = \frac{v_0^2 r}{G}.$$

Рассмотрим тонкий сферический слой в гало между радиусами r и $r+\Delta r$. Его объем равен

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r,$$

а масса составляет

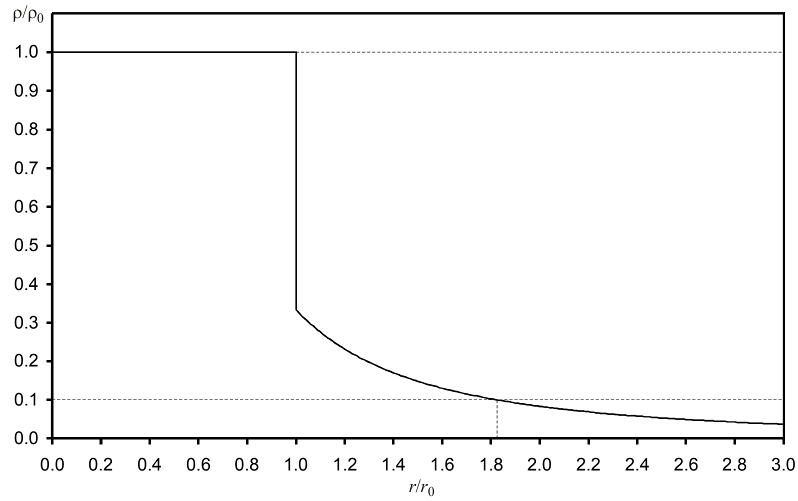
$$\Delta m = m(r+\Delta r) - m(r) = \frac{v_0^2 \Delta r}{G} = 4\pi\rho(r) r^2 \Delta r.$$

Отсюда мы получаем зависимость плотности от радиуса $\rho(r)$ в случае $r>r_0$:

$$\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} = \frac{\rho_0}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Итак, плотность постоянна до радиуса r_0, затем скачком падает в 3 раза и далее убывает обратно пропорционально r^2. Этот скачок соответствует излому зависимости $v(r)$, в реальных галактиках имеет место быстрое уменьшение плотности при переходе от балджа к гало. Нам остается найти расстояние r_{10}, на котором плотность ρ становится равной $\rho_0/10$:

$$\frac{\rho_0}{10} = \frac{\rho_0}{3}\left(\frac{r_0}{r_{10}}\right)^2; \quad r_{10} = r_0\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.8 \cdot r_0.$$



Система оценивания:

1 этап (3 балла): выражение центральной плотности галактики через заданные в условии величины r_0 и v_0. Может быть записано в виде отдельной формулы или быть включено в общие выкладки, что также оценивается. При ошибках в численном коэффициенте, вызванной арифметическими ошибками, максимальная оценка за этап составляет не более 2 баллов, при ошибке в коэффициенте, вызванном физическими причинами – не превышает 1 балла. При ошибках в степенях величин v_0 и r_0 этап не засчитывается.

2 этап (5 баллов): выражение плотности внешней части галактики как функции радиуса. Также может быть выражено в виде отдельной формулы или быть частью общих выкладок. При ошибке в степени радиуса r этап не засчитывается, при ошибке в численном коэффициенте оценка не превышает 1 балла в случае физических, и 2 баллов – арифметических ошибок.

Вероятная ошибка при решении задачи: непрерывность зависимости $\rho(r)$, опускание коэффициента 1/3 в формуле для плотности, ведущее к ответу $r_{10} = r_0\sqrt{10} \sim 3.2r_0$. Оценка за второй этап не превосходит 1 балла, остальные оцениваются в полной мере.

3 этап (2 балла): определение величины r_{10}. Определяются правильностью последнего действия, предыдущие ошибки на эту оценку не влияют.

Автор заданий: О.С. Угольников, кроме: 9.4 (Спасение планеты) – А.А. Автаева