XXVI Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Самара, 2019 г.

Теоретический тур

IX.1 ЛАЗЕР СЛЕДЯЩИЙ

О.С. Угольников

1. Условие. Искусственный спутник Земли обращается по круговой экваториальной орбите на высоте 500 км над поверхностью Земли в направлении осевого вращения Земли. На нем установлен мощный узконаправленный прожектор, вращающийся так, чтобы держать на луче определенную точку на экваторе Земли всегда, когда это только возможно. Определите длительность каждого сеанса такого освещения, а также угловые скорости прожектора в начале и середине сеанса. Сам спутник не вращается вокруг своей оси, атмосферной рефракцией и поглощением света, а также действием на систему всех других тел пренебречь.

1. Решение. Земля завершает один оборот вокруг своей оси за одни звездные сутки T_0=23.934ч. Скорость движения точки экватора за счет вращения Земли:

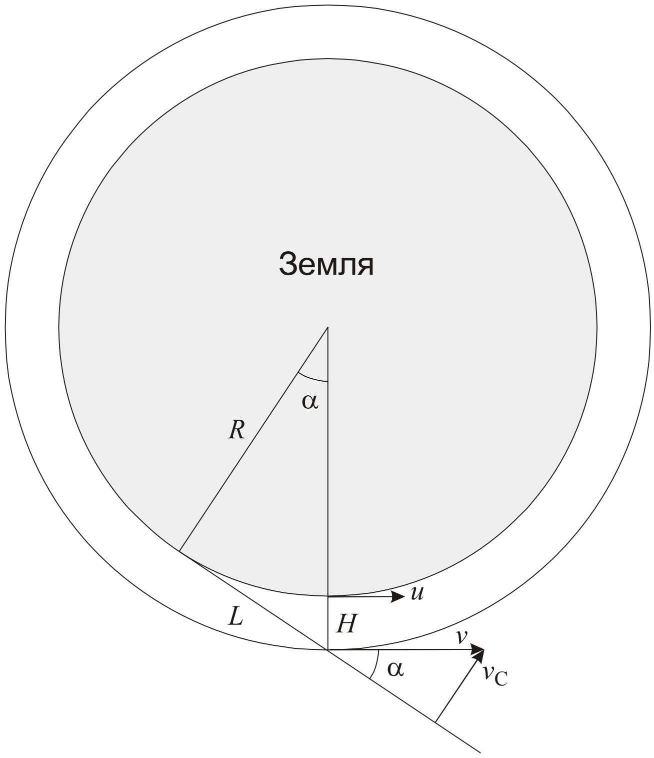
$$u = 2\pi R/T_0 = 0.465 \text{ км/с}$$

(R – экваториальный радиус Земли). Спутник обращается по круговой орбите на высоте H над поверхностью Земли. Определим его период и орбитальную скорость:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM}} = 1.577 \text{ час.}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+H}} = 7.613 \text{ км/с.}$$

Здесь M – масса Земли. Изобразим Землю и орбиту спутника на рисунке и определим еще две нужные для решения величины:



Синодический период спутника – период между его пролетами над одной точкой поверхности Земли:

$$S = \frac{T\,T_0}{T_0 - T} = 1.688 \text{ час}.$$

За этот период угол α – разность долгот спутника и точки поверхности – равномерно изменяется на 360°. Определим, при каком максимальном по модулю угле α спутник может направить прожектор на эту точку:

$$\alpha = \arccos\frac{R}{R+H} = 22^{\circ}.$$

Длительность одного сеанса – это время, за которое угол α меняется от –22° до +22°. Она составляет

$$\tau = S \cdot 2\alpha \,/\, 360° = 0.206 \text{ час} = 12.4 \text{ мин}.$$

Нам остается найти угловые скорости. В середине сеанса, когда точка Земли находится прямо под спутником, она будет иметь угловую скорость при наблюдении со спутника:

$$\omega_0 = \frac{v-u}{H} = 0.0143\ c^{-1} = 0.82^{\circ}/c.$$

Такую угловую скорость нужно задать прожектору в середине сеанса, чтобы он мог непрерывно освещать данную точку Земли. В начале и конце сеанса скорость точки Земли направлена к спутнику или от него и на угловую скорость не влияет. Компонента скорости спутника, перпендикулярная направлению на точку Земли, равна

$$v_C = v \sin\alpha = 2.852 \text{ км/с},$$

а расстояние между точкой Земли и спутником

$$L = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} = R\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2575.5 \text{ км.}$$

Угловая скорость прожектора должна быть равна

$$\omega = \frac{v_C}{L} = \frac{v\cos\alpha}{R} = \frac{v}{R+H} = \sqrt{\frac{GM}{(R+H)^3}} = \frac{2\pi}{T} = 0.00111 \text{ с}^{-1} = 0.063^{\circ}/\text{с}.$$

К этому выводу можно было прийти из простых рассуждений: в начале и конце сеанса прожектор должен просто удерживать направление по касательной к экватору Земли, то есть компенсировать угловую скорость движения спутника, вращаясь с той же угловой скоростью в противоположном направлении. Максимальная и минимальная угловая скорости прожектора имеют один знак.

1. Система оценивания.

Этап 1 – 3 балла. Определение длительности сеанса связи.
Выполнение предусматривает определение максимального угла α (2 балла) и синодического периода либо разницы угловых скоростей спутника и Земли (1 балл). Требуемая точность – 1° или 5%. Вместо угла α может определяться соответствующая дуга длины орбиты. В случае ошибки определения длины сеанса вследствие неправильного задания интервала $[0..\alpha]$ вместо $[-\alpha..\alpha]$ оценка за этап уменьшается до 1 балла, но последующие этапы оцениваются в полной мере. Участник олимпиады может использовать среднюю величину радиуса Земли вместо экваториальной, что не является ошибкой.

Этап 2 – 3 балла. Определение угловой скорости в середине интервала.
Вероятная ошибка: угловая скорость определяется как разность угловых скоростей спутника и Земли и оказывается близкой к геоцентрической угловой скорости спутника (0.0012 с^{-1}). В этом случае за этап выставляется 0 баллов. Такая же оценка ставится за любое задание выражения для угловой скорости, приведенное к центру Земли.
Вероятная ошибка: при расчете угловой скорости не учитывается вращение Земли, что приводит к величине v/H=0.015 рад/с или 0.87°/с. Оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Этап 3 – 2 балла. Определение угловой скорости в начале и конце интервала.
Возможно как вычисление этой угловой скорости, так и доказательство, что она совпадет с угловой скоростью орбитального вращения спутника. При численном ответе, не совпадающем с угловой скоростью вращения спутника (допустимая погрешность 5%), этап решения не засчитывается.

Возможная ошибка при решении: участник переходит в систему отсчета, вращающуюся с Землей, вращение спутника в ней происходит с меньшей, но постоянной скоростью. Такое решение производить можно, но необходимо учитывать, что сам спутник в этой системе отсчета будет вращаться вокруг своей оси, и при расчете угловой скорости прожектора необходимо сделать соответствующую поправку. Без нее угловая скорость прожектора, в частности, в начале и конце сеанса окажется равной нулю, а угловая скорость в середине сеанса будет несколько меньше правильной. При таком решении первый этап оценивается в зависимости от правильности его выполнения, за второй и третий этап выставляется по 1 баллу в случае отсутствия иных ошибок. Максимальная оценка за все решение – 5 баллов.

IX.2 СЕРП МАЛЫЙ И СЕРП БОЛЬШОЙ

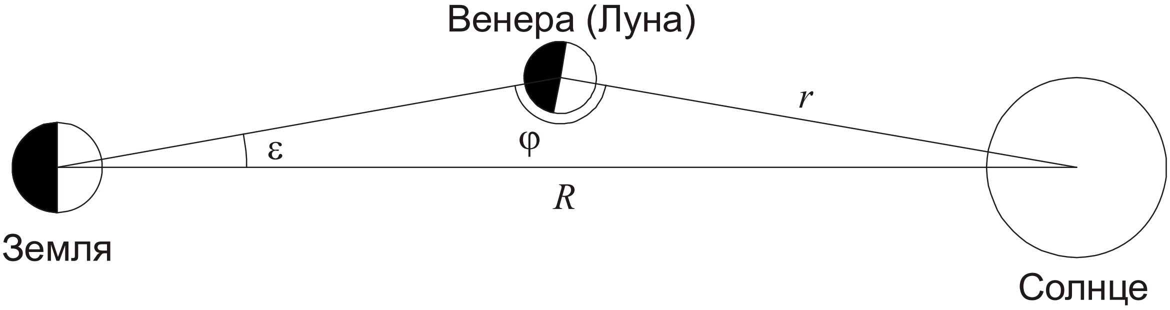
О.С. Угольников

2. Условие. Луна и Венера вступили на небе Земли в тесное соединение, обе при этом видны как тонкие серпы. У кого из них фаза больше и во сколько раз? Атмосферные эффекты увеличения фазы Венеры не учитывать.

2. Решение. Как известно, фаза сферического объекта (доля освещенной части видимого диска или, что тоже самое, его диаметра, перпендикулярного терминатору) равна

$$F = \frac{1 + \cos\varphi}{2},$$

где φ - угол с вершиной в объекте, образованный направлениями на Солнце и Землю (фазовый угол). Малая фаза может быть у объекта, расположенного между Солнцем и Землей. Положение этого объекта показано на рисунке.



По условию задачи, Венера и Луна располагаются рядом друг с другом, то есть их угловое удаление от Солнца ε одинаково и невелико. Обозначим расстояние от Солнца до Земли как R, до Венеры (или Луны) как r. Тогда из теоремы синусов для фазового угла имеем:

$$\sin\varphi = \sin\varepsilon\,\frac{R}{r}.$$

Дополнение угла φ до 180° - малая величина. Для таких углов справедливо:

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \sin^2\varphi} \approx -1 + \frac{\sin^2\varphi}{2} = -1 + \frac{\sin^2\varepsilon}{2}\frac{R^2}{r^2}.$$

Фаза объекта составляет

$$F = \frac{\sin^2\varepsilon}{4}\cdot\frac{R^2}{r^2}.$$

Для Луны, расположенной рядом с Землей, отношение $(R/r_\mathrm{M})^2$ фактически равно единице (вблизи новолуния оно равно 1.005), а для Венеры отношение $(R/r_\mathrm{V})^2$ больше единицы. В итоге, фаза Венеры будет больше фазы Луны, и соответствующее отношение составит:

$$\frac{F_\mathrm{V}}{F_\mathrm{M}} \approx \frac{R^2}{r_\mathrm{V}^2} = 1.91.$$

Учет конечности расстояния между Землей и Луной уменьшает эту величину до 1.90. Последнее тесное сближение Луны и Венеры в малых фазах (0.0165 и 0.0314 соответственно), видимое в Европейской части России, произошло вечером 2 января 2014 года. Еще раньше, 21 мая 2004 года, Луна в фазе 0.05 покрыла Венеру в фазе 0.10, явление наблюдалось на светлом вечернем небе на значительной части нашей страны.

2. Система оценивания. Для решения задания нужно выполнить несколько его основных этапов, последовательность которых может быть произвольной.

Этап 1 - 2 балла. Связь фазы и фазового угла.
Как известно, у частично освещенного диска планеты (не в затмении) величины фазы, определяемые через долю освещенного диаметра и освещенной площади, совпадают. Поэтому участник может использовать любое определение фазы, что не влияет на оценку. Этап засчитывается в случае математически правильной записи соотношения. Участник может брать формулу для связи фазы и фазового угла как известную, не выводя ее, этап в этом случае также засчитывается.

При ошибочном выполнении этапа (неверной формуле связи) этап не засчитывается. Однако, если на последующих этапах из формулы получается правильное приближение для случая малых фаз ($\sim R^2/r^2$), то последующие этапы засчитываются. При иных приближениях (например, $\sim R/r$) оценка за следующий этап уменьшается вдвое, последний этап не засчитывается.

Этап 2 - 4 балла. Выражение для фазы в приближении тонкого серпа (объект вблизи линии, соединяющей Солнце и Землю).
В этом выражении наиболее важной является степень зависимости от соотношения расстояний R/r ($\sin\varphi \sim R/r$, $(\cos\varphi + 1) \sim R^2/r^2$). В качестве фазового угла участник может использовать его дополнение до 180 градусов с соответствующей коррекцией формул. Если участник пользуется иной терминологией и обозначениями при решении, его метод необходимо проверить на указанные свойства пропорциональности. В случае их выполнения данный этап оценивается минимум в 2 балла (еще 2 балла - за правильное доказательство пропорциональности и ее коэффициенты). При иной степени оценка за выполнение этапа уменьшается вдвое, последующий этап не засчитывается.

Этап 3 - 2 балла. Вычисление окончательного ответа.
Засчитывается только в случае правильного ответа (с точностью отношения фаз до 10%) при правильном построении решения. Участники могут учесть разность расстояний от Солнца до Земли и Луны, которое изменит ответ с 1.91 до 1.90, но не повлияет на оценку.

Вероятная ошибка при решении: Участник олимпиады может интерпретировать условие, как попадание Солнца, Луны и Венеры на одну линию. Это является грубой ошибкой, при которой итоговая оценка составляет 1 балл при полностью верных (для описанного случая) вычислений и 0 баллов - во всех остальных случаях.

Вероятная ошибка при решении: итоговый ответ каким-либо образом зависит от линейных размеров Луны или Венеры. К этому же случаю относится ответ, в который радиусы Луны и Венеры не входят в явном виде, но который бы численно изменился, если бы физические размеры Луны и Венеры были бы иными. Такое решение не может быть оценено выше 1 балла.

Вероятная ошибка при решении: вместо соотношения фаз участник вычисляет соотношение видимых диаметров Луны и Венеры. Итоговая оценка составляет 0 баллов.

IX/X.3 ВНУТРИ ГАЛАКТИКИ

О.С. Угольников

3. Условие. Эллиптическая галактика типа E0 (шарообразная форма) на 20% по массе состоит из звезд солнечного типа и на 80% - из темной материи. Плотность обеих составляющих постоянна на всем объеме галактики. Некоторая звезда движется по замкнутой траектории внутри галактики, не вылетая за ее пределы, с периодом 100 миллионов лет. Сколько всего звезд было бы видно невооруженным глазом в небе обитаемой планеты, обращающейся вокруг этой звезды? Тесные сближения с другими звездами не учитывать.

3. Решение. Как известно, для сферического однородного массивного тела выполняется свойство: на материальную точку, расположенную внутри нее, действует притяжение всех частей тела, расположенных ближе к центру, нежели эта точка, а действие внешних слоев компенсируется. Таким образом, на тело, расположенное на расстоянии r от центра, будет действовать ускорение тяготения:

$$g = -\frac{4\pi G \rho r}{3}.$$

Знак "–" означает, что ускорение направлено к центру, противоположно радиусу-вектору **r**. Мы получили уравнение, похожее на уравнение пружинного маятника, возвращающая сила которого противоположна по знаку и пропорциональна по величине смещению груза маятника относительно равновесного положения: $a = -\omega^2 r$, здесь ω – частота колебаний маятника. В таком поле тяжести звезда будет совершать движение с постоянным периодом, не зависящим от начального положения. Колебания могут происходить и в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, и тогда звезда будет описывать эллипс, но центр галактики будет уже не в фокусе, а в центре этого эллипса. Период колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G \rho}}.$$

Отсюда мы получаем соотношение для полной плотности галактики:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = 1.4 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3.$$

Учтем далее, что на звезды приходится лишь доля η (0.2) от этой плотности и найдем концентрацию звезд солнечного типа в этой галактике n:

$$\rho \cdot \eta = n \cdot M; \quad n = \frac{\rho \cdot \eta}{M} = \frac{3\pi\eta}{GMT^2} = 1.4 \cdot 10^{-51} \text{ м}^{-3} = 0.041 \text{ пк}^{-3}.$$

Здесь M - масса Солнца. Определим, с какого расстояния r_0 Солнце, имеющее абсолютную звездную величину m_0 (+4.7) будет выглядеть как звезда с m=+6:

$$\lg r_0 = \frac{m - m_0}{5} + 1; \quad r_0 = 18.2 \text{ пк}.$$

Искомое число звезд есть их число внутри сферы с найденным радиусом:

$$N = \frac{4\pi n r_0^3}{3} \approx 1000.$$

3. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Установление связи между периодом вращения звезды и плотностью галактики, определение плотности.
Участники могут идти путем, описанным выше, и в этом случае этап при условии правильного выполнения оценивается полностью (3 балла). Они могут предположить, что орбита звезды круговая и произвести расчет по стандартным формулам небесной механики, учитывая только внутреннюю часть галактики. Тогда за этап выставляется 2 балла, но последующие этапы оцениваются в полной мере.

Этап 2 - 2 балла. Определение концентрации звезд в галактике.
Требуемая точность 10%.
Вероятная ошибка при решении: участник забывает о темной материи, завышая концентрацию звезд в 5 раз. В этом случае не засчитывается данный этап, а также финальный этап (запись ответа).

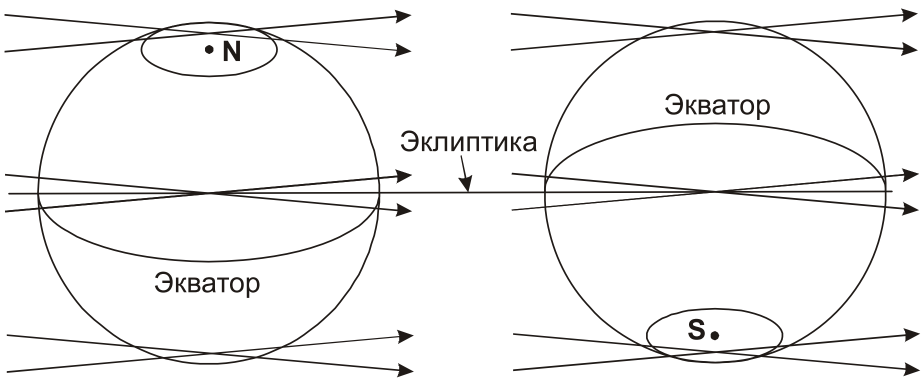
Этап 3 - 2 балла. Нахождение максимального расстояния до звезды, видимой невооруженным глазом.
В качестве предельной звездной величины для невооруженного глаза могут браться значения от 5.5^m до 6.5^m, что не является ошибкой. В остальных расчетах точность должна быть не хуже 10%.

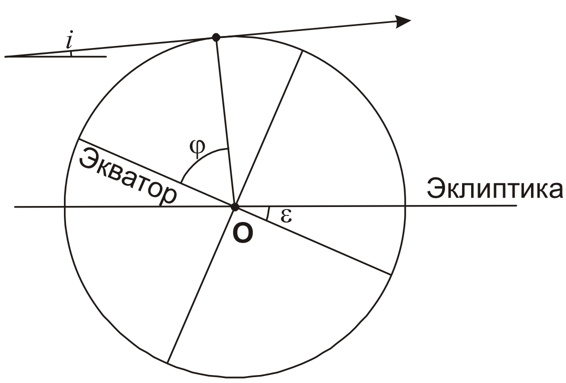
Этап 4 - 1 балл. Определение числа звезд, видимых в небе планеты.
Засчитывается в случае правильных выполнений предыдущих этапов. Отличие ответа от приведенного выше может быть вызвано только другим заданием предельной звездной величины на этапе 3, во всех остальных случаях при отклонениях ответа более, чем на 20%, этап не засчитывается. Участники могут найти число звезд, видимых в один момент с одной точки поверхности планеты и получить число около 500, что также засчитывается при условии соответствующего описания найденной величины.

Вероятная ошибка при решении: попытка учета межзвездного поглощения света в галактике, которое при описанном условии отсутствует. Оценка определяется точностью выполнения всех этапов и далее уменьшается на 2 балла.

4. Условие. В каких широтах лунная тень во время солнечного затмения может двигаться по поверхности Земли точно с запада на восток, и в каких – точно с востока на запад? Атмосферной рефракцией и рельефом Земли пренебречь.

4. Решение. Луна движется по орбите вокруг Земли против часовой стрелки (если смотреть с северной стороны) и при полном солнечном затмении ее тень движется по поверхности Земли обычно от утреннего полушария к вечернему. На рисунке показаны примеры движения тени Луны во время летнего и зимнего солнцестояния. Направление движения тени наклонено к плоскости эклиптики на малый угол (около 5°). В зависимости от сезона, когда наблюдается затмение, для любой широты от северного до южного полюса тень Луны в какой–то точке Земли может двигаться точно вдоль параллели, с запада на восток.

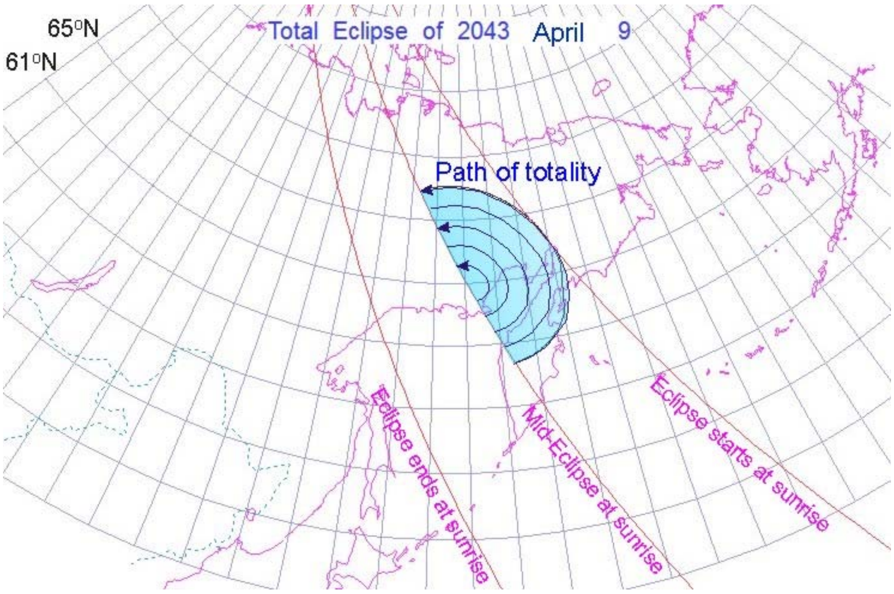




На этих же рисунках мы можем видеть, что вблизи летнего солнцестояния, если затмение наблюдается вблизи светлой полуночи в полярной области Земли на широтах более +66.6° (Северный полярный круг), тень может двигаться и с востока на запад. Соответственно, за Южным полярным кругом (широты от –66.6° до –90°) такая ситуация может случиться вблизи дня зимнего солнцестояния. Однако, широты в ±66.6° не будут предельными. Для нахождения граничной широты рассмотрим иной случай. Пусть затмение происходит вблизи весеннего равноденствия, а Луна располагается у восходящего узла своей орбиты. Предположим также, что лунная тень лишь слегка задела Землю с северной стороны. По рисунку мы можем определить, на какой широте произошло касание:

$$\varphi = 90° - \varepsilon - i = 61.4°.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике, i – наклон орбиты Луны к эклиптике. При затмении, близком к касательному, тень опишет на поверхности Земли дугу, по форме близкую к полукругу. В какой-то момент, ближе к окончанию затмения, она будет двигаться в западном направлении. Похожая ситуация сложится во время полного солнечного затмения 9 апреля 2043 года, которое будет наблюдаться на восходе Солнца на севере Камчатского полуострова. Область видимости полной фазы показана на рисунке. Такая же картина может наблюдаться в южном полушарии на широтах ниже –61.4° на заходе Солнца вблизи весеннего равноденствия или на его восходе вблизи осеннего равноденствия.



4. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Интервал широт, где тень может двигаться с запада на восток.
Оценивается 3 баллами только в случае правильного ответа (все широты). При указании половины интервала (от экватора до полюса) оценка составляет 1 балл, при указании интервала между полярными кругами - также 1 балл, в остальных случаях оценка за этап - 0 баллов. Формально говоря, участник олимпиады может не включать в ответ сами полюса, так как там понятия запада и востока не определены, это не влияет на оценку.

Этап 2 - 5 баллов. Интервал широт, где тень может двигаться с востока на запад.
При указании интервала широт от полярного круга до полюса (наиболее вероятная ошибка) оценка составляет 1 балл при указании одного полушария и 2 балла - при указании двух полушарий. При указании правильных границ оценка составляет 3 балла при указании одного полушария и 5 баллов - при указании двух полушарий. В последнем случае должно быть указано, при каких обстоятельствах может произойти такое затмение - вблизи равноденствий, тень Луны касается поверхности Земли. Оценка не меняется, если границы интервала изменены на 0.25° для учета видимых размеров Солнца.

Вероятная ошибка при правильном ответе: участник рассматривает случай, соответствующий солнцестояниям (верхние рисунки), но при этом указывает, что склонение Луны может достигать ε+i=28.6°, и поэтому минимальная широта по модулю равна 61.4°. Хотя данный ответ численно совпадает с правильным, но он получен из неверных соображений, так как при таких склонениях Луны затмения наступить не могут. Оценка за второй этап не превосходит 2 баллов (1 балла при указании одного полушария). Это правило действует, даже если участник олимпиады не указывает такое значение склонения Луны, но оно вытекает из его рассуждений, либо если правильный ответ дается без обоснований.

IX.5 КАРМАННЫЙ ПЛАНЕТАРИЙ

С.Г. Желтоухов

5. Условие. Один астроном решил сделать себе свой собственный планетарий, просверлив отверстия нужного размера в глобусе радиусом 20 см, в центр которого он установил точечный источник света. Оцените размер отверстия в глобусе, при котором размер проецируемой звезды перестанет сокращаться с уменьшением диаметра отверстия. Пусть такой диаметр соответствует самым слабым звездам, видимым невооруженным глазом. Считая, что относительная яркость звезд должна сохраняться, определите размер отверстия для самой яркой звезды ночного неба, Сириуса, имеющего звездную величину -1.5^m, и угловой размер его изображения. Звезды какой звездной величины сидящий рядом с планетарием астроном увидит, как точки?

5. Решение. Для начала рассчитаем угловой размер звезды для наблюдателя, расположенного в центре шара. Без учета дифракции света он будет равен отношению диаметра отверстия d к радиусу глобуса R:

$$\alpha = \frac{d}{R}.$$

Если бы распространение света всегда подчинялось правилам геометрической оптики, угловой размер сокращается вплоть до нуля при уменьшении отверстий. Будем называть эту величину «геометрическим» размером звезды.

На самом деле, дифракция света на краях апертуры вносит ограничение на минимальный угловой размер изображения:

$$\beta \approx \frac{\lambda}{d}.$$

Данное равенство имеет приближенный характер, так как пучок света, падающий на отверстие, не параллельный. По этим же причинам мы можем опустить коэффициент 1.22 в этой формуле. В итоге, дифракционный размер звезды увеличивается с диаметром отверстия.

Определим диаметр отверстия, при котором геометрический и дифракционный угловые размеры равны. В этом случае видимый размер звезды перестает уменьшаться, а напротив увеличивается с дальнейшим сужением отверстия:

$$\frac{d}{R} = \frac{\lambda}{d}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{\lambda R} \approx 0.3 \text{ мм}.$$

При вычислениях мы брали длину волны λ=550 нм, соответствующую максимуму чувствительности человеческого глаза. При таком радиусе отверстия оба фактора примерно одинаковы и накладываются друг на друга. Можно считать, что видимый размер изображения в этом случае будет примерно равен сумме геометрического и дифракционного:

$$\theta \approx \alpha + \beta = 2\frac{d}{R} = 2\frac{\lambda}{d} \approx 0.003 \text{ рад} = 10'.$$

Именно в таком конусе будет распределен свет от самого маленького отверстия, соответствующего звездам шестой звездной величины (самым слабым наблюдаемым невооруженным глазом звездам). Это существенно больше разрешения человеческого глаза, так что, к сожалению, такой самодельный планетарий вообще не сможет построить достаточно точечных звезд. Естественно, что более ярких звезд размеры будут еще больше.

Видимая суммарная яркость звезды определяется размером отверстия, дифракция на нее практически не влияет. Сириус ярче звезд шестой величины в $2.512^{6+1.5}$=1000 раз, и для такой звезды размер отверстия для него должен быть

$$d_S = d\sqrt{1000} \approx 10 \text{ мм}.$$

Это соответствует угловому размеру

$$\theta_S = \frac{d_S}{R} \approx 0.05 \text{ рад} = 3^\circ.$$

Здесь дифракция уже не играет никакой роли.

5. Система оценивания.

Этап 1 – 4 балла. Расчет оптимального диаметра отверстия.
Этап включает в себя определение «геометрического» размера (1 балл), определение «дифракционного» размера (1 балл, наличие коэффициента 1.22 не влияет на оценку), определение оптимального размера отверстия (2 балла). Неточности определения каждого из факторов, не превосходящие 2 раз, приводят к снятию соответствующего количества баллов. Если же один из факторов не учтен, то понятие минимального видимого диаметра теряет смысл. Вне зависимости от иных методов оценить его (расчеты яркости пятна с учетом мощности ламп и т.д.) этап полностью не засчитывается. Последующие этапы оцениваются в полной мере, если полученное значение видимого диаметра не отличается от правильного более, чем в 10 раз.

Этап 2 – 2 балла. Оценка возможности создания точечных изображений звезд.
Этап включает определение минимального углового размера изображения (1 балл). При этом коэффициент 2, приведенный в решении, не является обязательным – он может быть опущен или заменен коэффициентом 1.4, соответствующим наложению изображений по теореме Пифагора. Однако, если коэффициент не попадает в интервал от 1 до 2, оценка уменьшается на 1 балл. Второй балл выставляется в случае правильного вывода о невозможности точечных изображений. Если этот вывод сделан без корректного вычисления геометрического и дифракционного изображения, оценка за два первых этапа в сумме не превосходит 1 балл.

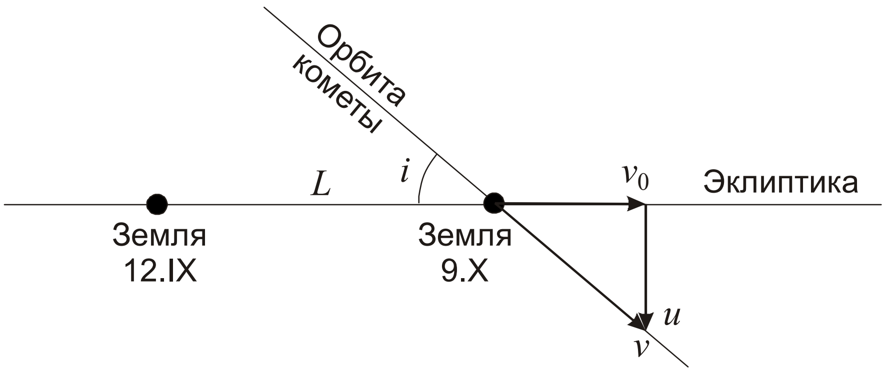
Этап 3 – 2 балла. Определение размера отверстия и углового размера изображения для Сириуса.
Ответ может быть в 1.4 или 2 раза меньше приведенного выше, если в такое же число раз меньшим оказывается угол θ при выполнении предыдущих этапов (см. выше), это не влияет на оценку. Однако, если на угловой размер изображения Сириуса влияет дифракция на крупном отверстии, то вне зависимости от ответа данный этап не засчитывается. Правильное численное определение обеих величин оценивается по 1 баллу.

IX.6 КОМЕТА СО СВИТОЙ

О.С. Угольников

6. Условие. 12 сентября 2018 года комета Джакобини-Циннера прошла на минимальном расстоянии от Земли в своем текущем обороте вокруг Солнца и одновременно оказалась в точке перигелия своей орбиты. После этого, 9 октября 2018 года, наступил острый максимум метеорного потока Дракониды, порожденного этой кометой. Считая, что радиант потока находится в северном полюсе эклиптики, а сам рой компактен, найдите минимальное расстояние кометы Джакобини-Циннера от Земли в 2018 году и наклонение ее орбиты к плоскости эклиптики. Эксцентриситет орбиты кометы равен 0.7, орбиту Земли считать круговой.

6. Решение. Изобразим орбиты кометы и Земли вблизи точки их пересечения в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору (направлению на Солнце). Мы считаем орбиты пересекающимися, так как по условию задачи наблюдался острый максимум метеорного потока, порожденного компактным роем частиц. Обозначим скорость кометы и метеорных частиц в точке встречи как v, скорость Земли как v_0. Их векторная разность – геоцентрическая скорость кометы u или, то же самое, скорость метеоров – перпендикулярна плоскости эклиптики, то есть лежит в плоскости рисунка. Следовательно, скорость v также расположена в этой плоскости.



Определим минимальное расстояние между Землей и кометой. Для этого перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с Землей. В ней комета движется со скоростью u перпендикулярно плоскости эклиптики (горизонтальной линии на рисунке), на которой находится Земля. Очевидно, максимальное сближение произойдет в тот момент, когда комета пересечет плоскость эклиптики. То есть, в момент времени t_0, 12 сентября 2018 года комета (если принять упрощения, сделанные в условии задачи) оказывается на минимальном расстоянии от Земли, причем в той же точке пространства, что где Земля окажется 9 октября (этот момент обозначим как t_1). Так как эти моменты разделяет меньше месяца, мы можем считать движение Земли равномерным. Отсюда получаем минимальное расстояние между Землей и кометой:

$$L = v_0\,(t - t_0) = 0.46 \text{ а.е.}$$

Теперь мы знаем, что точка пересечения орбит совпадает с точкой перигелия орбиты кометы, поэтому скорость кометы v в точке встречи есть перигелийная скорость кометы. Ее величина составляет

$$v = v_0\sqrt{1 + e}.$$

Из прямоугольного треугольника, образованного векторами трех скоростей, определяем величину наклона орбиты кометы к плоскости эклиптики:

$$i = \arccos\frac{v_0}{v} = \arccos\sqrt{\frac{1}{1+e}} = 40^{\circ}.$$

Выходя за рамки решения данной задачи, отметим, что на самом деле радиант потока Драконид удален от полюса эклиптики более, чем на 10°. Если это учесть, то полученные характеристики орбиты кометы несколько изменятся: ее наклон орбиты составляет 32°, а минимальное расстояние от Земли в сентябре 2018 года было около 0.39 а.е.

6. Система оценивания.

Этап 1 – 4 балла. Определение минимального расстояния между Землей и кометой.
Решение может вестись в упрощенном виде, как описано выше. Участник может также не считать движение Земли прямолинейным, и вместо длины дуги определить длину хорды, что практически не скажется на ответе. При определении расстояния участники могут оставаться в гелиоцентрической системе отсчета, что несколько усложняет решение, но приводит к тому же результату. Требуемая точность ответа – 5% (полный балл), 10% (2 балла за этап). При больших ошибках (в частности, если они вызваны попыткой осуществить более сложное трехмерное решение и учитывать изменение скорости кометы со временем) этап не засчитывается.

Возможная ошибка участника: положение кометы 12 сентября не совпадает с точкой узла ее орбиты (к этому случаю не относится различие этих точек менее, чем на 0.02 а.е., вызванное попыткой учесть кривизну траекторий обоих тел). Данный ошибочный вывод может не быть сформулирован напрямую, но следовать из решений, что также попадает под эту категорию ошибок. В этом случае весь этап не засчитывается (0 баллов), вне зависимости от численного ответа. Второй этап при этом может быть засчитан (см. далее).

Этап 2 – 4 балла. Наклонение орбиты кометы.
Половина данных баллов (2) выставляется за правильное численное или формульное определение скорости кометы, другая половина – за определение угла наклона. При ошибочном выполнении одного из этих подэтапов второй может быть оценен полностью в случае верного выполнения (хотя при этом второй этап после ошибки на первом может дать неверный ответ).

В случае ошибки на первом этапе, связанной с различием точки перигелия кометы и точки ее пересечения с орбитой Земли (см. выше), второй этап, вообще говоря, требует обоснования равенства скорости кометы (и метеоров) при пересечении орбиты Земли и в перигелии. Если этот факт каким-либо образом обосновывается (комета вблизи перигелия), то второй этап в случае верного выполнения засчитывается полностью. Если скорости приравниваются без обоснований - оценка снижается на 1 балл (максимум 3 балла за этап).

Вероятная ошибка участника: наклон орбиты кометы равен 90° или каким-то образом определяется углом между экватором и эклиптикой (ответы 23.4°, 66.6° и т.д.). К этому же случаю относятся варианты, при которых ответ зависит от угла наклона экватора к эклиптике, то есть меняется, если придать этому углу иное значение. В этих случаях этап полностью не засчитывается (0 баллов).

X/XI.1 ЛАЗЕР ДВИЖУЩИЙ

Автор неизвестен

1. Условие. В одном из проектов будущего предполагается разгонять маленькие космические корабли мощным лазерным лучом, отправляя их на большие расстояния. До какой скорости можно разогнать идеально зеркальный корабль цилиндрической формы с диаметром основания 1 мм и массой 1 мг оптическим лазером мощностью 1 МВт и расходимостью пучка 5″? Считать, что основание цилиндра ориентировано перпендикулярно лазерному лучу, сам луч при выходе из лазера очень тонкий. Начальной скоростью корабля и гравитационным действием на него всех окрестных тел пренебречь.

1. Решение. Действие лазера на корабль будет несколько по-разному происходить в ближней зоне, когда весь пучок света будет попадать на грань корабля, и в дальней зоне, где корабль будет перехватывать лишь часть пучка. Определим расстояние, на котором размер пучка будет равен размеру корабля:

$$D_0 = d_0 / \rho = 41 \text{ м}.$$

Здесь d_0 - диаметр корабля, ρ - расходимость пучка света лазера, выраженная в радианах. Пока расстояние от корабля меньше, чем D_0, лазер будет создавать постоянную силу светового давления, равную

$$F_0 = 2P / c,$$

где P - мощность лазера, c - скорость света. Множитель 2 появляется из-за зеркальной поверхности аппарата и положения его грани перпендикулярно пучку. В итоге, на расстоянии D_0 аппарат приобретет кинетическую энергию

$$E_0 = F_0 D_0 = \frac{2Pd_0}{\rho c}.$$

Когда аппарат удалится от лазера на большее расстояние D, на него будет действовать лишь часть пучка, доля перекрываемой площади будет убывать как квадрат расстояния. Сила действия составит

$$F = F_0 \frac{D_0^2}{D^2}.$$

Картина аналогична движению в гравитационном поле с той разницей, что сила имеет противоположный знак. При удалении с расстояния D_0 на бесконечность аппарат получит приращение кинетической энергии на величину $\Delta E = F_0 D_0 = E_0$. В итоге, кинетическая энергия аппарата на большом удалении от лазера будет равна $2E_0$. Теперь мы можем найти его скорость:

$$v = \sqrt{\frac{4E_0}{m}} = \sqrt{\frac{8Pd_0}{m\rho c}} \approx 1 \text{ км/с}.$$

1. Система оценивания.

Этап 1 – 1 балл. Представление характера действия лазерного пучка на аппарат, который будет разным в двух зонах по расстоянию, определение границы зон.
При отсутствии такого понимания – использования единой зависимости силы действия пучка на аппарат первый этап не засчитывается, а суммарная оценка за последующие этапы не превышает 2 баллов, см. далее.

Этап 2 – 3 балла. Вычисление кинетической энергии и/или скорости аппарата на границе ближней зоны.

Может выполняться в общем виде или численно. При использовании неверной зависимости силы от расстояния (отличной от константы), вытекающей из решения участника, этап оценивается в 0 баллов.

Вероятная ошибка: отсутствие множителя 2 в выражении для энергии или появление какого-либо иного постоянного множителя. Оценка за этап уменьшается на 1 балл, также влияя на оценку за финальный этап решения.

Этап 3 – 3 балла. Вычисление кинетической энергии аппарата на бесконечном удалении.

Может выполняться в общем виде или численно. При использовании неверной зависимости силы от расстояния (отличной от $\sim 1/D^2$), вытекающей из решения участника, этап оценивается в 0 баллов. Повтор ошибки, связанный с коэффициентом 2, не приводит к уменьшению оценки, если она уже была уменьшена на предыдущем этапе, но влияет на следующий этап.

Этап 4 – 1 балл. Вычисление скорости аппарата на бесконечном удалении.

Засчитывается только при правильном выполнении всех этапов и правильном ответе с точностью до 20%.

X/XI.2 ВЗРЫВ КОМЕТЫ

О.С. Угольников

2. Условие. Ядро слабой кометы располагается в противосолнечной точке неба на расстоянии 1 а.е. от Земли, находясь при этом в перигелии своей параболической орбиты. В этот момент в ядре происходит взрыв, разбивающий его на миллион одинаковых осколков, разлетающихся во все стороны со скоростью до 10 м/с. Вскоре после взрыва комета на короткое время становится видимой на пределе в телескоп с диаметром объектива 8 см. Оцените время, в течение которого комета будет превосходить по своей поверхностной яркости фон неба (21^m с квадратной секунды).

2. Решение. В первое время после взрыва комета остается еще достаточно компактным объектом. Определим предельную звездную величину для точечного объекта при наблюдении в телескоп с диаметром объектива D:

$$m = 6 + 5\ \lg\ (D/d) = 11.$$

Здесь d - диаметр зрачка глаза, который для ночных условий равен примерно 8 мм. Легче всего комету будет видно в небольшой телескоп в тот момент, когда облако осколков расширится ровно настолько, чтобы осколки не затеняли друг друга, но будет еще компактным. Коль скоро комета появилась в телескоп на короткое время, можно судить, что это произошло как раз в описанный выше момент.

После этого комета начинает расширение. Она располагается в перигелии, поэтому в качестве мы можем считать, что ее расстояние от Солнца первое время будет примерно постоянным. Расстояние до Земли может меняться, но это, как известно, не будет влиять на поверхностную яркость протяженного объекта. Поэтому мы можем предположить, что расстояние от кометы до Земли остается постоянным и равно l=1 а.е. Кстати, именно такая ситуация реализуется, если комета обращается вокруг Солнца в плоскости эклиптики в ту же сторону, что и Земля. Тогда ее звездная величина первое время тоже меняться не будет, оставаясь равной 11^m. Определим угловой радиус кометы, при которой ее поверхностная яркость составит 21^m (10^{-4} от полной яркости) с угловой секунды:

$$\rho = \sqrt{10000/\pi}'' = 56'' \approx 1'.$$

Пространственный радиус кометы будет равен $R = l\sin\rho \sim 40$ тыс. км. Нам остается определить, за какое время самые быстрые выброшенные с ядра частицы удалятся от него на такое расстояние:

$$T = R\ /\ v = 1.5\ \text{месяца}.$$

В реальности, за это время расстояние кометы от Солнца возрастет с 2 а.е. до 2.07 а.е, что изменит ее поверхностную яркость всего на 0.07^m, а итоговый ответ – на два дня. Поэтому сделанное нами предположение вполне пригодно для решения этой задачи. Остается заметить, что за такое время комета, изначально располагавшаяся в противостоянии с Солнцем в нашем небе, вне зависимости от направления своего движения не успеет оказаться с ним в соединении и скрыться в его лучах (даже при противоположном направлении движения кометы элонгация будет около 90°). В свою очередь, рой частиц еще останется близким к сферическому, не исказившись в ходе движения по орбите.

2. Система оценивания.

Этап 1 - 2 балла. Определение проницающей способности телескопа.
Допускается отклонение ответа от приведенного выше на 1^m, связанного с иной величиной диаметра зрачка глаза (от 6 до 10 мм) и иной предельной звездной величиной для невооруженного глаза (от 5.5 до 6.5^m). Это не влияет на оценку как за этот этап, так и за последующие, где ответы также будут отличаться. Если же отклонение вызвано использованием неверных формул, то этап не засчитывается полностью.

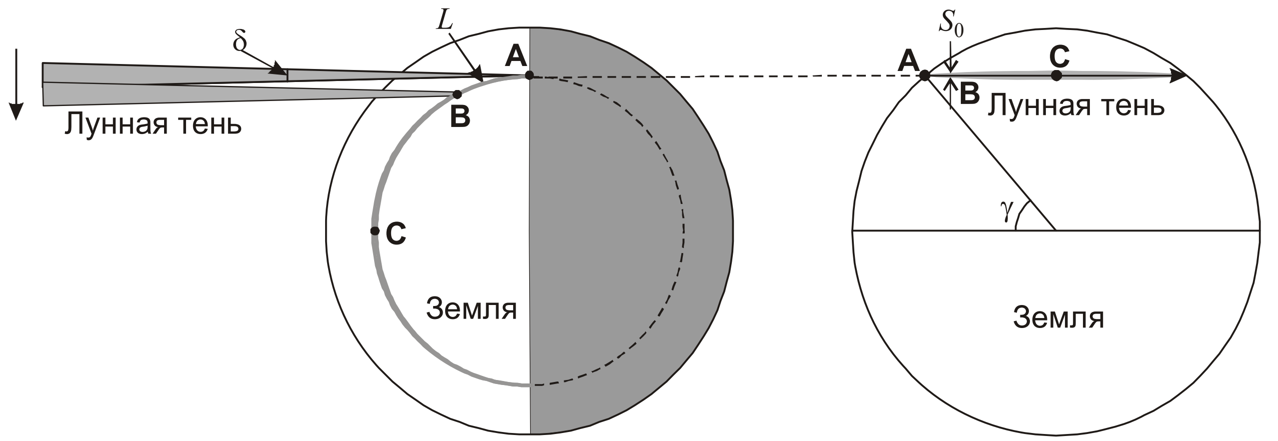
Этап 2 - 1 балл. Указание, что расстояние кометы от Солнца в последующее время практически не будет изменяться.
Это необходимо для корректного выполнения последующих этапов, в частности, анализа поверхностной яркости кометы. Участники могут не делать это предположение и рассчитывать расстояние в соответствии с характером орбиты кометы, в таком случае последующие этапы оцениваются исходя из правильности их выполнения.

Этап 3 - 3 балла. Определение пространственного размера кометы, при котором ее видимая поверхностная яркость совпадет с яркостью фона неба.
Нужно либо указать, что поверхностная яркость не зависит расстояния от Земли, и тогда возможно приводить расчеты к расстоянию 1 а.е., либо проводить вычисления методом, независящим от расстояния. При отсутствии подобного пояснения либо указания, что расстояние от Земли тоже будет практически постоянным, за этап выставляется 2 балла, остальные оцениваются в полной мере.

Этап 4 - 2 балла. Определение искомого времени.
Этап оценивается в 2 балла при условии правильного ответа. Допускаются отклонения, вызванные эффектами, описанными в первом этапе решения.

4. Условие. На Земле происходит солнечное затмение. В некоторой точке Земли на горизонте наблюдается полное затмение с фазой ровно 1.0, видимые диски Солнца и Луны совпадают по положению и размерам. В 10 км от этой точки вдоль пути тени ширина полосы полной фазы на поверхности Земли составляет 200 м. На какой максимальной высоте над горизонтом можно будет увидеть это полное солнечное затмение на Земле? Атмосферной рефракцией, рельефом и эффектами осевого вращения Земли пренебречь.

4. Решение. Изобразим картину видимости этого затмения в проекции, перпендикулярной плоскости вращения Луны вокруг Земли (слева) и вид со стороны Солнца (справа).



Солнце сбоку *Солнце позади наблюдателя*

Нам неизвестен угол γ (аналог широты, если бы лунная тень двигалась параллельно экватору), характеризующий путь лунной тени по хорде диска Земли. Обозначим точку, описанную в условии задачи и в которой затмение с фазой 1.0 наблюдается на горизонте, как **A**, будем для определенности считать, что в этой точке тень Луны вошла на поверхность Земли. Плоскость движения оси тени пересечет поверхность Земли по окружности, показанной пунктиром на рисунке слева. Угол раствора конуса лунной тени δ равен угловым диаметрам Солнца и Луны, совпадающим при наблюдении из точки **A**. В качестве значения этого угла возьмем средний угловой диаметр Солнца – 32′ или 0.0093 радиан. Расстояние L между точками **A** и **B** мало, и соединяющая их линия на поверхности Земли может считаться прямым отрезком, образующим малый угол с осью тени. С учетом этого, толщина конуса тени в точке **B** равна $S_0 = L\delta = 93$ метра. Из–за эффекта проекции ширина полосы тени на поверхности Земли увеличивается до

$$S = S_0 / \cos\gamma = L\delta / \cos\gamma.$$

Эта величина нам известна, она равна 200 м. Отсюда получаем величину угла γ:

$$\gamma = \arccos (L\delta/S) = 62.3°.$$

Если пренебречь размерами тени по сравнению с радиусом Земли R, то максимальная высота над горизонтом h_0, на которой будет видно полное затмение в точке **C**, есть дополнение угла γ до 90° и равна 27.7°. Можно получить и более точное решение. В середине затмения, в точке **C**, ширина конуса увеличится до $R\delta \cos \gamma = 27.5$ км. На нижнем краю полосы (правый рисунок) высота Солнца над горизонтом во время наибольшей фазы составит

$$h = h_0 + (R\delta \cos \gamma / 2R) = h_0 + \delta\cos\gamma/2 = 27.8°.$$

Как видим, учет конечной ширины тени на ответ практически не влияет.

4. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Ширина конуса тени в точке B.
Может определяться численно, может быть записана в виде формулы, которая используется в дальнейших вычислениях. Допускается отклонение в пределах 5%, связанное с изменением видимых диаметров Солнца и Луны. При ошибке в 2 раза (угловой радиус Солнца путается с его угловым диаметром) этап не засчитывается, оставшиеся оцениваются в полной мере, в зависимости от их выполнения.

Этап 2 - 3 балла. Определение угла γ или вида хорды пути тени по диску Земли, на основе данных о ширине полосы.

Этап 3 - 2 балла. Определение максимальной высоты наблюдения полного затмения над горизонтом.
Учет ширины тени может производиться, но не обязателен и на оценку не влияет.

Возможная ошибка при решении: решение и ответ оказываются зависимыми от сезона года, широты точки наблюдения затмения, угла наклона экватора к эклиптике (ε=23.4°), угла наклона орбиты Луны к эклиптике (i=5.1°), меняясь при формальном изменении этих углов. Данные признаки однозначно свидетельствуют об ошибочности решения, вне зависимости от ответа. Такое решение не может быть оценено выше 2 баллов, оценка далее снижается при наличии в решении иных фактических ошибок.

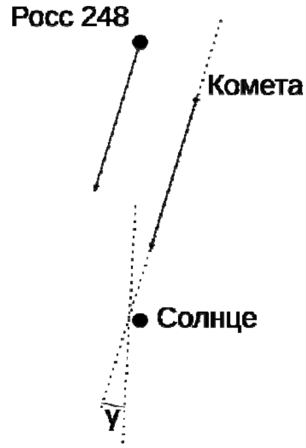
Возможная ошибка при решении: угол γ путается с его дополнением до 90° (синус путается с косинусом), получается неправильный ответ h=62.3°. В этом случае этап 1 оценивается полностью при условии его выполнения, этапы 2 и 3 засчитываются по 1 баллу. Максимальная оценка (при условии отсутствия иных ошибок) составляет 5 баллов.

X/XI.5 МЕЖЗВЕЗДНАЯ СТРАННИЦА

Е.Н. Фадеев

5. Условие. Комета покинула окрестности звезды Росс 248 по параболической траектории относительно нее и попала в окрестности Солнца, пролетев мимо него на минимальном расстоянии 1 а.е. Какой был эксцентриситет орбиты этой кометы при пролете около Солнца? На какой угол изменится направление скорости кометы после пролета через Солнечную систему? Параметры звезды Росс 248: собственное движение 1.6″/год, лучевая скорость равна -78 км/с, параллакс 0.32″. Влиянием на систему всех иных тел, кроме Солнца и звезды Росс 248, пренебречь.

5. Решение. Вся история наблюдений за кометами, за очень редкими исключениями, свидетельствует о том, что эксцентриситеты орбит комет, навсегда покидающих Солнечную систему, незначительно больше единицы, т. е. кометы улетают по почти параболическим орбитам. Разумно предположить, что если в системе звезды Росс 248 существуют кометы, то свойства их орбит такие же. А значит, улетевшая на большое расстояние от звезды комета будет относительно практически неподвижна относительно этой звезды.



В таком случае комета относительно Солнца будет иметь такую же скорость, что и звезда, а именно:

$$V_C = \sqrt{V_r^2 + \left(4.74\frac{\mu}{\pi}\right)^2} = 81.5\ \text{км/с}.$$

Здесь V_r - лучевая скорость звезды, μ - ее собственное движение, π - годичный параллакс. Именно такую скорость имеет комета, издали приближаясь к Солнцу. С другой стороны, в соответствии с законом сохранения энергии, скорость на любом участке гиперболической орбиты равна

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right).$$

Здесь G – гравитационная постоянная, M – Масса Солнца, a – параметр, который по аналогии с эллиптическими орбитами называется большой полуосью орбиты кометы. На бесконечно большом расстоянии

$$V_C^2 = \frac{GM}{a},$$

откуда большая полуось равна $2\cdot 10^{10}$ м или 0.134 а.е. Расстояние в перицентре r_p равно 1 а.е. Следовательно, эксцентриситет равен

$$\varepsilon = \frac{r_p}{a} + 1 = \frac{V_C^2}{v_0^2} + 1 \approx 8.49.$$

Здесь v_0 - круговая скорость на расстоянии 1 а.е., близкая к орбитальной скорости Земли. Уравнение асимптот гиперболы можно записать в виде

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

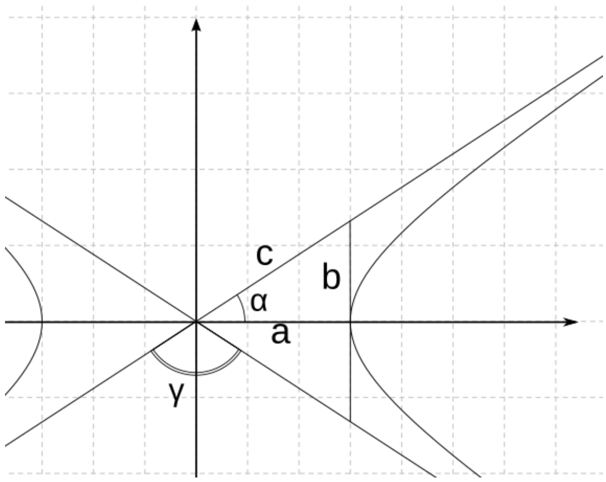
где b – малая полуось гиперболы:

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что угол между асимптотой и осью абсцисс равен

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Выражение для угла α можно получить в более простом виде, воспользовавшись известным соотношением для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$, где c – фокусное расстояние ($c = a\varepsilon$).



Из рисунка видно, что

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{c}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Сам искомый угол поворота равен

$$\gamma = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Таким образом, угол поворота зависит только от эксцентриситета орбиты.

$$\gamma = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 14°.$$

К тому же выводу можно прийти другим путем. Малая полуось гиперболы есть:

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{r_{\text{p}}^2 + 2r_{\text{p}}a} = 1.13 \text{ а.е.}$$

и

$$\gamma = 180^{\circ} - 2\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = 14°.$$

5. Система оценивания.

Этап 1 – 1 балл. Вывод о том, что комета относительно Солнца «на бесконечности» движется со скоростью звезды.

Этап 2 – 1 балл. Вычисление гелиоцентрической скорости кометы на удалении от Солнца.
Скорость может быть определена численно или записана в виде выражения на основе данных о звезде Росс 248. Первые два этапа могут быть выполнены участником слитно в виде одного абзаца или выражения.

Этап 3 – 3 балла. Определение эксцентриситета орбиты.
2 балла выставляются за применение правильной формулы и 1 балл – за верное численное решение. Однако, при величине эксцентриситета $e<1$ оценка за этап не может превышать 1 балл.

Этап 4 – 3 балла. Определение угла поворота кометы.
2 балла выставляются за применение правильной формулы и 1 балл – за верное численное решение.

Вероятная ошибка при решении: В качестве скорости кометы берется какая-либо величина, не связанная со скоростью звезды. В этом случае не оцениваются первые два этапа, третий этап при условии верного исполнения (для принятой скорости) оценивается полностью, последний этап - не более 2 баллов (нет правильного ответа). Максимальная оценка составляет 5 баллов.

X.6 ГЛОБАЛЬНАЯ БУРЯ

О.С. Угольников

6. Условие. На Марсе разразилась мощная пылевая буря, охватившая в равной степени всю планету и ослабившая блеск Солнца в зените на 1^m. Определите общую массу поднятой пыли, считая, что она состоит из частиц радиусом 0.1 мм и плотностью 1.5 г/см^3. Волновые эффекты при взаимодействии света с частицей не учитывать.

6. Решение. Ослабление света на 1^m (2.512 раз) примерно соответствует ситуации, когда на пути света от Солнца в зените до поверхности Марса в среднем оказывается одна пылевая частица. Если бы мы могли разложить всю эту пыль равномерно по поверхности планеты, то она легла бы на нее одним ровным слоем. Мы можем определить полное количество частиц, разделив площадь поверхности Марса (радиус *R*) на площадь сечения одной частицы (радиус *r*):

$$N = \frac{4\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{4R^2}{r^2} = 5 \cdot 10^{21}.$$

Суммарная масса этих частиц составит

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 N = \frac{16\pi\rho r R^2}{3} = 2.9 \cdot 10^{13} \text{ кг}.$$

Если быть более точным, то ослабление света на 1^m соответствует числу пылинок на луче зрения $\eta = \ln 2.512 = 0.92$, и общая масса пыли составит $\eta m = 2.7 \cdot 10^{13}$ кг.

6. Система оценивания.

Этап 1 – 3 балла. Оценка среднего количества частиц на луче зрения при наблюдении в зените.

Примерная оценка в единицу достаточна для выставления максимальной оценки в 3 балла. Более точная оценка дает число частиц, равное 0.92 и уменьшение итоговой массы пылевого слоя на 8%, что на оценку не влияет. Более грубый подход, не учитывающий возможное перекрытие частиц друг с другом, дает количество частиц на луче зрения, равное $(1-2.512^{-1})=0.6$, что приведет к недооценке массы на 30–40%. В этом случае первый этап оценивается 1 баллом, последующие выкладки оцениваются в полной мере. При оценке количества частиц на луче зрения меньше 0.5 или больше 2.0 оценка ***за все задание*** обнуляется. Это относится также к случаю, когда подобная величина не указывается, но вытекает из решения участника.

Этап 2 – 5 баллов. Оценка массы пыли.

Это можно делать как напрямую, так и через определение (в общем или численном виде) количества частиц в атмосфере Марса. В этом случае это определение оценивается в 2 балла, последующее вычисление массы – в 3 балла. При ошибке более чем на один порядок величины (в 10 раз) оценка за второй этап не превосходит 2 баллов, при ошибке на два порядка и более второй этап не засчитывается полностью.

Вероятное неточное решение: схема, при которой пыль воспринимается как монолитный слой на поверхности Марса толщиной 0.1 мм. Такой подход также приведет к недооценке массы примерно на 40% и в случае правильных вычислений все решение оценивается в 6 баллов.

XI.3 СКВОЗЬ ЗЕМЛЮ

О.С. Угольников

3. Условие. Между полюсами Земли прорыли прямую шахту, из которой был откачан газ. Аппарат, оснащенный надежной термозащитой, был сброшен в эту шахту с поверхности Земли без начальной скорости. Во время пролета через центр Земли аппарат на короткое время включил импульсный двигатель, выбросивший 1/10 полной массы аппарата с относительной скоростью 10 м/с назад вдоль линии движения аппарата. С какой скоростью аппарат вылетит из шахты на противоположном полюсе Земли? Считать Землю однородным по плотности шаром.

3. Решение. Как известно, если аппарат находится внутри сферического тела радиусом R на расстоянии $r<R$ от его центра, то на него будет действовать только притяжение внутренних слоев шара, ограниченных сферой радиуса r. Это позволяет нам записать выражение для вектора ускорения свободного падения аппарата на расстоянии r от центра Земли:

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{4\pi G\rho r^3}{3r^3}\mathbf{r} = -g_0\frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Здесь ρ – плотность Земли, g_0 – модуль ускорения свободного падения на ее поверхности. Знак "–" указывает, что ускорение направлено противоположно радиусу–вектору $\mathbf{r}$. Мы получили ни что иное, как уравнение колебаний математического маятника с частотой, равной

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}.$$

Будем считать момент запуска аппарата начальным t=0. Тогда движение аппарата до запуска двигателей будет происходить по гармоническому закону с амплитудой, равной радиусу Земли:

$$r = R\cos\omega t.$$

При достижении центра Земли аппарат будет иметь скорость

$$v_0 = R\omega = \sqrt{g_0 R} = 7.9 \text{ км/с},$$

совпадающую с первой космической скоростью на поверхности Земли. Обозначим начальную массу аппарата как M, массу выброшенного вещества как m, его относительную скорость – как u. Учтем, что $m<<M$ и $u<<v_0$. Приращение скорости аппарата после маневра составляет Δv. Тогда скорость аппарата в середине маневра равна ($v_0+\Delta v/2$), а средняя скорость выброшенного вещества $v_0+\Delta v/2 - u$. Запишем закон сохранения импульса:

$$(M - m)\,(v_0 + \Delta v) + m\,(v_0 + \Delta v/2 - u) = Mv_0.$$

Приращение скорости аппарата после маневра равно

$$\Delta v = u\frac{m}{M - m/2} = 1.052 \text{ м/с}.$$

Эта величина с высокой точностью совпадает с результатом, полученным по формуле Циолковского:

$$\Delta v = u \cdot \ln\frac{M}{M-m} = 1.054 \text{ м/с.}$$

Частота пружинного маятника определяется только зависимостью силы от расстояния от точки равновесия, и после маневра она не изменяется. Аппарат вновь движется внутри Земли по гармоническому закону с той же частотой ω, но с большей амплитудой $R+\Delta R$, причем $\Delta R/R=\Delta v/v_0$. Отсюда

$$\Delta R = R\frac{\Delta v}{v_0} = R\frac{u}{v_0}\cdot\ln\frac{M}{M-m} = 0.85 \text{ км.}$$

Обозначив время пролета через центр Земли и маневра как t_0, запишем уравнение его дальнейшего движения:

$$r = (R+\Delta R)\sin\omega(t-t_0).$$

Знак "–" указывает, что аппарат находится в противоположном полушарии относительно точки запуска. Скорость движения аппарата также меняется по гармоническому закону:

$$v = (v_0+\Delta v)\cos\omega(t-t_0).$$

В момент вылета аппарата из шахты на поверхности Земли имеем:

$$\omega(t-t_0) = \arcsin\frac{R}{R+\Delta R};$$

$$v(R) = (v_0+\Delta v)\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2} \approx v_0\sqrt{\frac{2\Delta R}{R}} = \sqrt{2\Delta v\cdot v_0} = 129 \text{ м/с.}$$

Ту же величину мы можем получить из закона сохранения энергии, приравняв приращение кинетической энергии единицы массы аппарата при маневре в центре Земли его кинетической энергии при вылете из шахты:

$$v(R) = \sqrt{(v_0+\Delta v)^2 - v_0^2} \approx \sqrt{2\Delta v\cdot v_0} = 129 \text{ м/с.}$$

Скорость аппарата при вылете в сто с лишним раз больше, чем его приращение скорости, полученное в центре Земли! Фактически, аппарат совершил активный гравитационный маневр наподобие того, как делают межпланетные аппараты в поле тяжести больших планет, чтобы затем отправиться в более далекие области Солнечной системы.

3. Система оценивания. Выше приведен только один из возможных способов решения задачи. Ее можно также выполнить, оперируя с величинами энергии, хотя это может потребовать суммирование (интегрирование) по слоям Земли для вычисления потенциальной энергии. Общая структура решения состоит из трех этапов.

Этап 1 – 3 балла. Вычисление скорости у центра Земли до включения двигателей.
Может выполняться численно или в общем виде. При получении выражения для скорости, не эквивалентного первой космической скорости на поверхности, этап не засчитывается. При использовании модели с постоянным ускорением или других неверных моделей этап также не засчитывается вне зависимости от численного ответа.

Этап 2 – 2 балла. Вычисление скорости у центра Земли после маневра.
Этап оценивается полностью как при использовании формулы Циолковского, так и приближения (m / (M – m/2)). При использовании приближений (m/M) или (m/(M–m)),

дающих погрешность около 0.05 м/с в центре Земли и затем 5 м/с при вылете из шахты, выставляется только 1 балл, но остальные этапы оцениваются в полной мере.

Этап 3 – 3 балла. Вычисление скорости после вылета аппарата.
Этап может быть выполнен с помощью закона сохранения энергии, так и на основе формул для колебаний пружинного маятника. Этап не засчитывается полностью при использовании модели с постоянным ускорением или иных неверных физических моделей, вне зависимости от ответа.

Возможная ошибка при решении: скорость при вылете приравнивается к приращению скорости при маневре в центре Земли. Решение оценивается в 2 балла в случае верного расчета этого приращения (см. этап 2) и в 0 баллов во всех остальных случаях.

4. Условие. Полное солнечное затмение произошло 20 марта у восходящего узла орбиты Луны. В пункте **A** центральное затмение наблюдалось на восходе Солнца, полная фаза (между моментами внутренних контактов дисков Луны и Солнца) продлилась ровно 2 минуты. В пункте **B** центральное затмение наступило в местный истинный солнечный полдень, а полная фаза продлилась ровно 3 минуты. Определите широты обоих пунктов. Рельеф Земли и атмосферную рефракцию не учитывать.

4. Решение. Изобразим вид Земли с лунной тенью при таком затмении со стороны Солнца и Луны. Отметим, что коль скоро затмение произошло в равноденствие, скорость точки **A**, связанная с осевым вращением Земли, вне зависимости от ее широты, направлена перпендикулярно плоскости рисунка и, тем самым, перпендикулярно скорости движения тени. Поэтому длительность полной фазы в точке **A** будет определяться только шириной конуса тени:

$$T_A = D_A / v,$$

где v – скорость тени, которая фактически совпадает со скоростью орбитального вращения Луны. Так как Земля 20 марта находится примерно посередине между точками перигелия и афелия своей орбиты, а затмение полное, разумно предположить, что видимый диаметр Луны был близок к максимальному, то есть, Луна располагается вблизи перигея своей орбиты. Тогда ее скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{l_0} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = 1.08 \text{ км/с}.$$

Здесь M - масса Земли, l_0 - среднее расстояние Луны от Земли, e - эксцентриситет орбиты Луны. Отсюда мы получаем диаметр тени в точке **A**: D_A =130 км.

На самом деле, данных в условии задачи достаточно, чтобы однозначно установить расстояние от центра Земли до Луны и ее скорость в момент затмения. За счет вариаций эксцентриситета расстояние составляло около 360 тысяч км, а скорость Луны и ее тени была близка к максимальной, 1.09 км/с. Желающие могут ознакомиться с данным выводом, не обязательным для участников олимпиады, в конце решения. Сейчас же вполне достаточно значений, типичных для Луны в перигее своей орбиты.

Обозначим искомую широту точки **B**, где затмение произошло в полдень, как φ_B. Так как дело происходило в равноденствие, высота Солнца и Луны над горизонтом составляла $h = 90° - |\varphi|$. Данная точка находилась ближе к Луне, чем центр Земли (и точка **A**) на величину

$$r = R\sin h = R\cos\varphi.$$

Здесь R – радиус Земли. Угол раствора тени δ равен угловому диаметру Солнца, равному вблизи равноденствия 32.0′ или 0.00931 рад. Это дает нам возможность определить диаметр конуса тени в точке **B**:

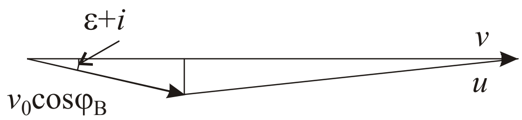
$$D_B = D_A + R\delta\cos\varphi_B = vT_A + R\delta\cos\varphi_B.$$

Во время затмения точка **B** движется за счет осевого вращения Земли со скоростью $v_B = v_0\cos\varphi_B$, где v_0 – экваториальная скорость осевого вращения Земли (0.46 км/с). Эта скорость наклонена к движению тени на угол $\varepsilon+i$=28.6° – вспомним, что дело происходило в равноденствие, а Луна располагалась у восходящего узла орбиты.

Вообще говоря, скорость тени по поверхности Земли выражается через теорему косинусов:

$$u = \sqrt{v^2 + v_0^2 \cos^2 \varphi_B - 2vv_0 \cos\varphi_B \cos(\varepsilon + i)}.$$

Дальнейшие вычисления широты φ_B можно вести напрямую с решением соответствующего квадратного уравнения, но это приведет к громоздким выкладкам. Процедура существенно упрощается, если обратить внимание, что величина $v_0\cos\varphi_B$ существенно меньше, чем v: отношение v_0/v составляет 0.43, а широта φ_B достаточно велика, на что указывает небольшая разница длительности полной фазы T_B и T_A. В этом случае мы можем записать выражение для скорости u в первом приближении:



$$u_1 = v - v_0 \cos\varphi_B \cos(\varepsilon + i).$$

Фактически, в этом приближении мы считаем угол между скоростями u и v малым и вместо скорости u находим ее проекцию на линию скорости v. Обозначим приближенное значение искомой широты точки **B**, которое мы найдем в этой модели, как φ_{B1}. Запишем выражение для длительности полной фазы в точке **B**:

$$T_B = \frac{D_B}{v - v_0 \cos\varphi_{B1} \cos(\varepsilon + i)} = \frac{vT_A + R\delta \cos\varphi_{B1}}{v - v_0 \cos\varphi_{B1} \cos(\varepsilon + i)}.$$

Отсюда мы находим приближенное значение широты точки **B**:

$$\varphi_{B1} = \pm \arccos \frac{v(T_B - T_A)}{R\delta + v_0 T_B \cos(\varepsilon + i)} = \pm 60.6^{\circ}.$$

Мы видим, что широта достаточно велика, что оправдывает сделанное выше предположение. Более того, как мы увидим далее, полученное значение достаточно близко к истине и может быть основанием хорошего приближенного решения всего задания. Однако, при желании мы можем получить и более точное значение широты. Возвращаясь к рисунку выше, запишем уточненное выражение для скорости u:

$$u = \sqrt{u_1^2 + v_0^2 \cos^2 \varphi_B \sin^2(\varepsilon + i)} \approx u_1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_B \sin^2(\varepsilon + i)}{2u_1} = u_1 + \Delta u_1.$$

Поправка к скорости Δu_1 мала, и нам достаточно определить ее, использовав полученное ранее приближенное значение широты φ_{B1}:

$$\Delta u_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_{B1} \sin^2(\varepsilon + i)}{2u_1} = 0.02 \text{ км/с}.$$

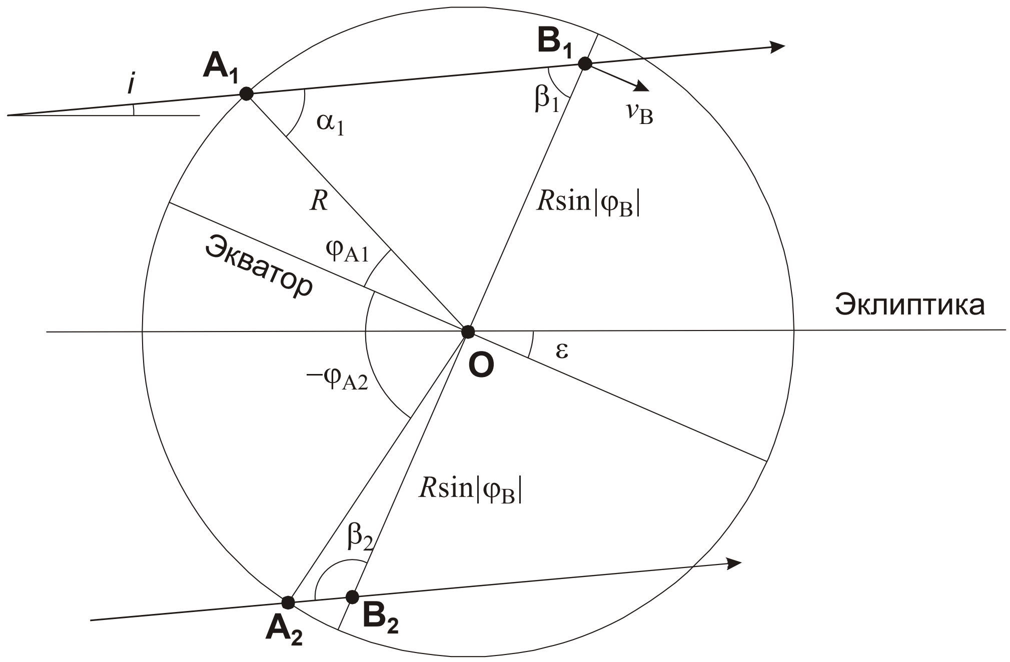
Эта величина существенно меньше самой скорости тени для данной широты u_1 (0.88 км/с). Теперь мы корректируем выражение для длительности полной фазы в точке **B**:

$$T_B = \frac{vT_A + R\delta \cos\varphi_B}{v - v_0 \cos\varphi_B \cos(\varepsilon + i) + \Delta u_1}$$

и получаем уточненное значение широты точки **B**:

$$\varphi_B = \pm\arccos\frac{v(T_B - T_A) + \Delta u_1 T_B}{R\delta + v_0 T_B\cos(\varepsilon + i)} = \pm 58.8^{\circ}.$$

Отметим, что точный анализ скоростей в соответствии с теоремой косинусов дал бы такое же значение широты точки **B** с точностью до десятых долей градуса: ±58.8°. Значения широты с разными знаками определяют положения точек $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ на рисунке. Каждой из них соответствует своему пути тени и своей точкой $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$, обе эти точки также показаны на этом рисунке.



Для определения широты точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ воспользуемся теоремой синусов в треугольнике $\mathbf{OA_1B_1}$ ($\mathbf{OA_2B_2}$). Сторона $\mathbf{OA_{1,2}}$ в нем равна радиусу Земли R, сторона $\mathbf{OB_{1,2}}$ – $R\sin|\varphi_B|$. Для угла при вершине в точке **B** справедливо

$$\beta_1 = 90^\circ - \varepsilon - i;$$
$$\beta_2 = 90^\circ + \varepsilon + i = 180^\circ - \beta_1.$$

Синусы этих углов одинаковы, и запись теоремы синусов для обоих треугольников будет иметь идентичный вид:

$$\frac{\sin\alpha}{R\sin|\varphi_B|} = \frac{\sin\beta}{R}; \quad \frac{\sin\alpha}{\sin|\varphi_B|} = \cos(\varepsilon + i).$$

Отсюда мы получаем значение угла α при точке **A**, одинакового для обоих треугольников:

$$\alpha = \arcsin(\sin|\varphi_B|\cos(\varepsilon + i)) = 48.7^{\circ}.$$

Теперь мы можем найти широты обеих точек $\mathbf{A}_{1,2}$:

$$\varphi_{A1,2} = \pm\alpha - \varepsilon - i = \arcsin(\sin\varphi_B\cos(\varepsilon + i)) - \varepsilon - i.$$

Численные значения получаются равными +20.1° и –77.3°. Итак, задача имеет два ответа: φ_A=+20.1°, φ_B=+58.8°; φ_A=–77.3°, φ_B=–58.8°.

Затмение, близкое по свойствам к описанному, произошло 25 марта 1838 года в южном полушарии Земли. Оно началось на восходе Солнца на широте –77.9°, полная центральная фаза длилась там 2 минуты 7 секунд. В истинный полдень центральное полное затмение было видно на широте –58.6°, полная фаза длилась при этом 3 минуты 10 секунд.

Комментарий (для ознакомления, необязательный для указания участниками олимпиады). Исходя из данных условия задачи, мы можем определить расстояние до Луны и ее скорость во время затмения. Как уже говорилось, тень Луны представляет собой конус с углом раствора, равным видимому диаметру Солнца δ. Определим длину этого конуса:

$$L = d / \delta = 373400 \text{ км}.$$

Здесь d - диаметр Луны. Сразу обратим внимание, что величина L меньше среднего расстояния от Земли до Луны. Находись Луна на таком расстоянии, полное затмение Солнца на его восходе вообще не могло бы наблюдаться. Но мы его все же видим, его длительность составляет T_A = 120 секунд. Обозначим расстояние до Луны в этот момент как l. Диаметр тени на таком расстоянии будет равен (L - l) δ. Скорость осевого вращения Земли в точке **A** направлена к Луне и не влияет на длительность полного затмения. Следовательно, длительность есть отношение диаметра тени в точке **A** к скорости Луны:

$$T_A = \frac{D_A}{v} = \frac{(L-l)\delta}{v}.$$

Ввиду малости эксцентриситета лунной орбиты для скорости Луны в это время выполняется приближенное соотношение:

$$v = v_L \frac{l_0}{l}.$$

Здесь v_L - круговая скорость Луны (1.023 км/с), l_0 - ее среднее расстояние от Земли. Фактически, это выражение закона сохранения момента импульса в предположении, что скорость Луны перпендикулярная радиусу-вектору, а точнее, что синус угла между этими векторами близок к единице. В итоге, мы имеем:

$$T_A = \frac{(L-l)\delta}{v_L} \cdot \frac{l}{l_0}.$$

Мы можем переписать это как квадратное уравнение относительно l:

$$l^2\delta - Ll\delta + v_L l_0 T_A = 0.$$

Физический смысл имеет одно решение этого уравнения (другое будет соответствовать точке рядом с Луной):

$$l = \frac{L\delta + \sqrt{L^2\delta^2 - 4\delta\, v_L l_0 T_A}}{2\delta}.$$

Второе слагаемое в выражении под корнем по модулю значительно меньше первого, в чем можно убедиться численной подстановкой. В этом случае выражение упрощается:

$$l = \frac{L\delta \cdot (2 - 2\delta\, v_L l_0 T_A / L^2\delta^2)}{2\delta} = L \cdot \left(1 - \frac{v_L l_0 T_A}{L^2\delta}\right) = 359800 \text{ км.}$$

Отметим, что во время затмения 25 марта 1838 года, описанного выше, расстояние было немногим меньше: около 358000 км. Соответственно, скорость движения Луны по орбите составляет 1.09 км/с. Разница ответов по сравнению с полученными выше не превосходит 1°.

4. Система оценивания.

Этап 1 - 5 баллов. Определение широты точки B.
Вычисление может производиться как точным методом с достаточно громоздкими вычислениями, так и последовательными приближениями, описанными выше. Участник может брать значение скорости движения Луны как для среднего перигея (1.08 км/с), так и пытаться вычислить его (см. комментарии, 1.09 км/с), что несколько скажется на ответе, но не сказывается на оценке.

Возможные методы и ошибки при выполнении этого этапа:
1) Проведение только приближенных вычислений с получением значения широты φ_B около 60-61 градуса. При корректном выполнении этап оценивается в 4 балла.
1) Учет только первого из двух факторов, влияющих на увеличение продолжительности затмения - приближения наблюдателя к Луне в точке **B**, что приводит к сохранению в знаменателе формулы для cos φ_B только слагаемого $R\delta$. При оставшихся правильных вычислениях участник получит значение косинуса широты чуть больше единицы с выводом, что решения не существует. В этом случае оценка за все решение не превосходит 1 балла. Такая же оценка выставляется в случае возможных ошибок в вычислениях, которые могут привести к существованию ответа, даже если он близок к правильному. При возникновении спорных ситуаций относительно правильности решения члену жюри имеет смысл проверить фактор зависимости ответа от угла наклона экватора к эклиптике (ε) и наклона лунной орбиты к эклиптике (i), которых в случае данного ошибочного решения не будет.
2) Учет только второго из двух факторов, влияющих на увеличение продолжительности затмения - движения наблюдателя в точке **B** за счет осевого вращения Земли, что приводит к сохранению в знаменателе формулы для cos φ_B только слагаемого $v_0 T_B \cos(\varepsilon + i)$. При дальнейших правильных вычислениях это даст широту φ_B около 27°. Оценка за весь этап составляет 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.
3) Учет обоих факторов, но без множителя cos (ε+i) или с множителем cos i во втором слагаемом знаменателя, что эквивалентно предположению, что Луна и ее тень движутся параллельно или под малым углом к экватору Земли. Широта точки **B** в этом случае получается равной ±62.9°. Оценка за весь этап уменьшается на 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.
4) Учет обоих факторов, но со множителем cos (ε-i) или cos ε во втором слагаемом знаменателя, что эквивалентно пренебрежению или неправильному учету наклона лунной орбиты к эклиптике. Оценка за весь этап уменьшается на 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.
5) В качестве скорости Луны может быть взята ее средняя скорость (1.02 км/с), что приводит к завышенному значению широты (примерно на 2°). В этом случае оценка за первый этап снижается на 1 балл, при этом второй этап в случае правильного выполнения оценивается полностью.
6) Запись ответа только для одного из полушарий Земли. Оценка за этап снижается на 1 балл, следующий этап оценивается частично, за один ответ, см. далее.

7) Получено два значения широт точек **B**, но они не совпадают по модулю. Оценка за этап составляет 0 баллов вне зависимости от правильности хотя бы одного ответа, но последующий этап оценивается в полной мере.

Этап 2 - 3 балла. Определение широты точки A.
Ошибки, сделанные в предыдущей части решения и тем самым меняющие результат и на данном этапе, не влияют на оценку за второй этап, если на первом этапе было получено некоторое значение широты, которое было корректно использовано на втором этапе. Правильное определение широты одной из точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ оценивается в 1 балл, обеих – в 3 балла. Если участник считает картины аналогичными и указывает в ответе, что широты одинаковы по величине и противоположны по знаку, то оценка за этап составляет 1 балл, если полученная величина широты совпадает с одной из правильных, и 0 баллов в иных случаях. Ошибка в решении треугольников, приводящая к обоим неверным значениям широты, является основанием для снижения оценки за каждую часть этапа (0 баллов при отсутствии правильных ответов).

Внимание членов жюри! В случае неточного выполнения первого этапа задания и неверных значений широт точек $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ правильными широтами точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ считаются не те, что указаны в данном решении, а те, что получаются в подстановку в последнюю формулу полученных участником неверных значений широт точек **B**.

Возможные ошибки:
1) Только одна пара ответов широт точек **A** и **B** - 1 балл за второй этап (и не более 3 за первый этап).
2) Две пары ответов, где широты точек $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ совпадают по модулю, но различаются знаком: 0 баллов за 2 этап, если среди них нет правильных, и 1 балл, если одна из них верна.
3) Пренебрежение наклоном орбиты Луны к эклиптике или его учет с неверным знаком: 1 балл за весь второй этап, если при этом не сделано иных ошибок. Если же не учтен угол ε, оценка за весь второй этап обнуляется.

Вероятная общая ошибка при решении: точка **B**, в которой затмение наблюдается в полдень, полагается серединой хорды – пути тени по поверхности Земли, то есть точкой наблюдения его наибольшей фазы. Эти точки близки друг к другу только вблизи солнцестояний, что не относится к случаю данной задачи. За первый этап решения выставляется 0 баллов, второй этап оценивается в зависимости от правильности его выполнения: для угла α в этом случае должно получиться соотношение:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin|\varphi_B|}{\cos(\varepsilon + i)}\right),$$

после чего применяется последняя формула из приведенного выше решения. Здесь φ_B – широта точки **B**, найденная участником на первом этапе решения.

XI.6 СКОПЛЕНИЕ В ПЫЛИ

О.С. Угольников

6. Условие. Рассеянное скопление имеет радиус 10 пк и состоит из звезд, подобных Солнцу, газа и пыли. Расстояние до скопления равно 1 кпк. Газопылевое облако имеет тот же центр и радиус, а оптическая толщина по диаметру равна 100. Звезды, газ и пыль распределены в скоплении однородно. Пылинки черные, их радиус 1 мкм, плотность 1 г/см^3. Массовый вклад пыли составляет 1/100 от вклада газа, газ прозрачен. В земные телескопы в скоплении видно 100 звезд блеском ярче 20^m. Определите, какая доля полной массы скопления содержится в звездах. Межзвездным поглощением вне скопления и волновыми эффектами на пыли пренебречь.

6. Решение. Определим, какую звездную величину имели бы звезды скопления при отсутствии поглощения света пылью:

$$m_0 = m_A - 5 + 5\lg d = 14.7.$$

Здесь m_A – абсолютная звездная величина звезды, d – расстояние до скопления. В реальности, звезды выглядят слабее. Определим оптическую толщину слоя пыли, при котором звезда будет иметь предельную для указанного в условии телескопа звездную величину m=20:

$$\tau = \ln 10^{0.4(m-m_0)} = 0.4(m-m_0)\cdot \ln 10 = 0.92(m-m_0) \approx 5.$$

Нам известно, что скопление однородное, а его оптическая толщина по диаметру (расстояние $2R$) равна $\tau_0 = 100$. Тогда расстояние сквозь скопление, соответствующее заданной оптической толщине, равно

$$l = 2R\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{R}{10}.$$

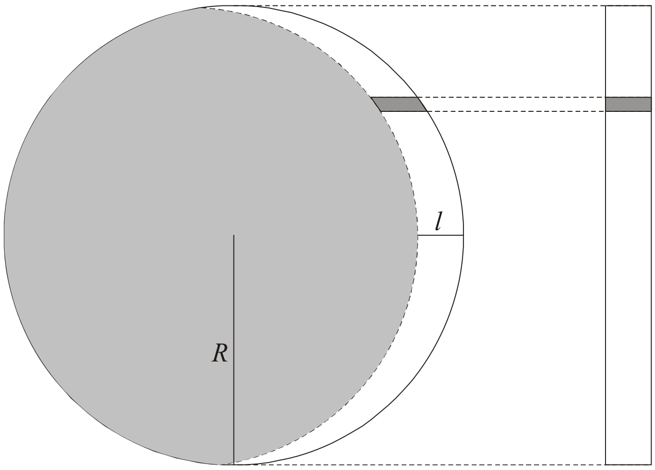
Здесь R – радиус скопления. Получается, что мы видим звезды только в переднем по отношению к нам тонком слое скопления. Форма этого слоя показана на рисунке, он представляет собой область пространства между двумя сферами радиуса R, сдвинутыми друг относительно друга на расстояние l. Как видно на рисунке, с учетом малой толщины этой области, ее объем практически равен объему диска с радиусом R и толщиной l, показанным на рисунке «с ребра». Эффекты на оптически тонких краях скопления незначительны. Обе фигуры можно составить из малых фрагментов одинакового объема, один из которых показан на рисунке темно-серым цветом. Объем данного пространства V, занимаемый видимыми звездами скопления, равен $\pi R^2 l$. К этому же выводу можно прийти несколько более сложным образом, заметив, что пространство есть разница двух сегментов шара одинаковым радиусом R и высотами $(R+l)$ и R.

$$V = \frac{\pi(R+l)^2}{3}(3R-R-l) - \frac{\pi R^2}{3}(3R-R) = \frac{\pi}{3}\left((R+l)^2(2R-l) - R^3\right).$$

С учетом $l \ll R$ мы имеем:

$$V \approx \frac{\pi}{3}\left((R^2+2Rl)^2(2R-l) - r^3\right) \approx \pi R^3 l.$$

Число звезд в данной области N=100. Определим полное число звезд в скоплении:



$$N_0 = N \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\pi R^2 l} = N \frac{4R}{3l} = \frac{40N}{3} \approx 1300.$$

Суммарная масса звезд скопления M_* есть 1300 масс Солнца или $2.6 \cdot 10^{33}$ кг. Найдем теперь концентрацию пылинок n, исходя из их оптической толщины (числа пылинок на луче зрения) по диаметру:

$$\tau_0 = n \cdot \pi r^2 \cdot 2R;$$

$$n = \frac{\tau_0}{2\pi R r^2} = 5.3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-3}.$$

Теперь мы можем определить полное число пылинок

$$N_\text{D} = n \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 6.5 \cdot 10^{48}.$$

и массу пыли в скоплении:

$$M_\text{D} = n \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{8\pi\tau_0 \rho R^2 r}{9} = 2.6 \cdot 10^{34} \text{ кг}.$$

Масса газа M_G есть $100M_\text{D}$ или $2.6 \cdot 10^{36}$ кг. Теперь мы можем определить массовый вклад звезд в скоплении:

$$\eta_* = \frac{M_*}{M_* + M_\text{D} + M_\text{G}} \approx \frac{M_*}{M_\text{G}} = 0.001.$$

6. Система оценивания. Решение задания разделяется на несколько этапов, которые могут производиться в разном порядке:

Этап 1 – 2 балла. Определение длины *l* – глубины расположения звезды в скоплении по лучу зрения, с которой она может иметь заданную в условии видимую звездную величину.

Этап засчитывается при условии правильного использования формул для видимой звездной величины в данных условиях и правильного соотношения длины l к радиусу скопления R с точностью 10% (т.е. l/R от 0.09 до 0.11). При этом допускается исключение коэффициента 0.92 (приравнивание к единице) и использование приближенного значения абсолютной звездной величины Солнца ($+5^m$), которые не выведут ответ за пределы данного интервала. При больших погрешностях этап не засчитывается. Если отношение l/R оказывается большим единицы или если такое соотношение вытекает из решения участника – оценка ***за все решение*** задания обнуляется.

Возможная ошибка при решении: замена диаметра скопления радиусом, что уменьшает глубину l вдвое. В этом случае этап засчитывается наполовину (1 балл), но последующие этапы (кроме последнего) оцениваются в полной мере.

Этап 2 – 2 балла. Определение объема области скопления, занимаемой видимыми звездами.
Объем может быть определен на основе геометрических рассуждений, приведенных выше, допускается использование численного интегрирования или применения формул для объема сегмента, каждый из способов одинаково верен. 2 балла выставляется в случае правильного понимания типа фигуры и правильного вычисления объема. 1 балл выставляется при правильном понимании типа фигуры и ошибкой вычисления объема менее, чем в 1.5 раза.
Возможная ошибка при решении: неправильное понимание фигуры. Она может быть представлена, как тонкий полусферический слой толщиной l, его объем равен $2\pi R^2 l$, превышая правильный вдвое. Эта фигура может быть также представлена как область между сферой и эллипсоидом (аналогично серпу Луны, только в трехмерном пространстве). Ее объем составляет $2\pi R^2 l/3$, то есть 2/3 от верного. В этих случаях за второй этап решения выставляется 1 балл, но остальные (кроме последнего) оцениваются в полной мере. Если полученный объем превышает объем всего скопления или если такое соотношение вытекает из решения участника – оценка ***за все решение*** задания обнуляется.

Этап 3 – 1 балл. Определение общей массы звезд скопления.
Может выполняться численно или в виде формульных соотношений. Ошибки, сделанные на предыдущих этапах (кроме обнуляющих всю оценку), не влияют за оценку за данный этап.

Этап 4 – 2 балла. Определение массы пыли в скоплении.
Допускается отклонение ответа на 20%, связанное с приближенными вычислениями, при ошибке до 50% оценка уменьшается на 1 балл. Если при вычислении неправильно интерпретируется оптическая толщина (не как число пылинок на луче зрения) или делаются качественные ошибки в формулах – этап не засчитывается.

Этап 5 – 1 балл. Определение массового вклада звезд в скопление.
Засчитывается при правильных вычислениях и правильном ответе. Допускаются погрешности, вызванные оценками величины l на первом этапе, а также неверным представлением фигуры на втором этапе, если их суммарный эффект не превосходит 2 раз.