XXV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Волгоград, 2018 г.

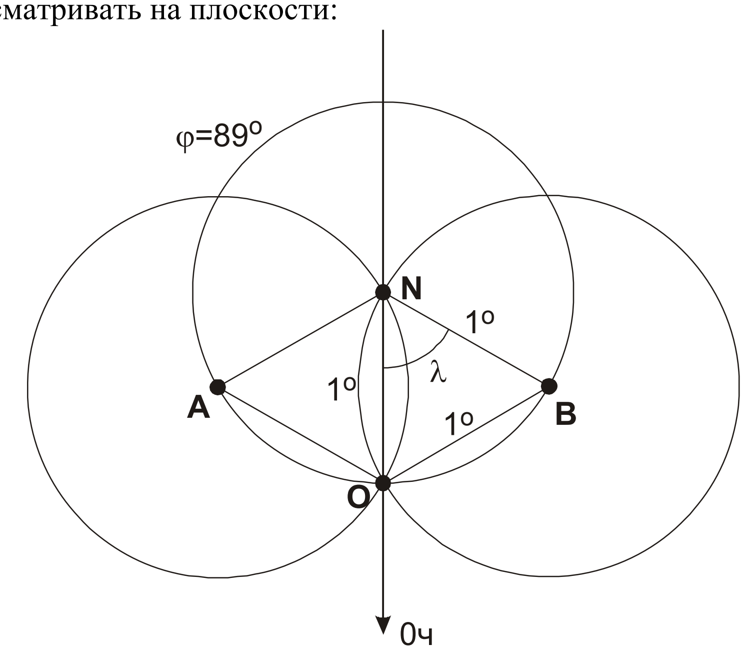
Теоретический тур

IX.1 ПРИПОЛЯРНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

Условие. В 0ч Всемирного времени 20 марта некоторый далекий объект оказывается на высоте 89° над горизонтом при наблюдении с Северного полюса и с точки с координатами 89° с.ш., 0° д. Определите экваториальные координаты объекта. Уравнением времени пренебречь.

Решение. Если далекий объект виден в какой-то точке Земли на высоте 89° – это значит, что данная точка отстоит на 1° по поверхности Земли от места, где объект наблюдается в зените. Обе точки, о которых идет речь в условии, и точка, где объект наблюдается в зените, расположены в пределах 1° друг от друга, и соответствующий участок поверхности Земли вполне можно рассматривать на плоскости:



На рисунке буквой **N** обозначен северный полюс, буквой **O** – точка с координатами 89° с.ш., 0° д. Они удалены друг от друга на 1°. На то же расстояние от каждой из них должна быть удалена точка, где объект наблюдается в зените. Мы видим, что таких точек две – **A** и **B**, каждая из них образует с точками **N** и **O** равносторонний треугольник. Очевидно, что широта обеих точек составляет 89°, и эта же величина равна склонению объекта, коль скоро он виден в зените. Долгота λ есть угол между направлениями на точку B(A) и нулевым меридианом, она равна ±60° или ±4 часа.

Учтем далее, что 20 марта в 0ч по Всемирному времени (или в 0ч по местному времени на нулевом меридиане) звездное время равно 12 часам. Следовательно, в точках **B** и **A** звездное время будет равно 12±4 часа, то есть 16 часов и 8 часов соответственно. Звездное время есть прямое восхождение светил, проходящих верхнюю кульминацию и, в частности, расположенных в зените. Итак, условию задачи удовлетворяют два светила. Координаты первого: α=8ч, δ=+89° (в зените в точке **A**), координаты второго: α=16ч, δ=+89° (в зените в точке **B**).

Система оценивания (от одного члена жюри). Первый этап решения задания заключается в формулировке условия наблюдения звезды на высоте 89° в указанных пунктах. Оно может быть сделано в виде схемы в проекции на поверхность Земли или на небесную сферу вблизи зенита на широте 89°, возможна также текстовая формулировка. Данный этап оценивается в 2 балла. Следующие 2 балла выставляются за указание, что таких точек (и таких объектов на небе) сразу два. Еще по 2 балла выставляется за правильное вычисление координат объектов, причем необходимо одновременное указание как правильного прямого восхождения, так и правильного склонения звезд, иначе соответствующий этап не засчитывается.

Таким образом, если участник олимпиады находит только одно из решений, не указав на существование второго, он получает 2 балла за первый этап и 2 балла за координаты одного объекта. Его суммарная оценка не превышает 4 баллов.

В случае ошибочного решения, при котором объект в точке (89°, 0°) находится в кульминации – на меридиане (такое возможно при малом расстоянии до объекта, но это противоречит условию задания) и вероятном ответе – α=12ч, δ=+89.5°, общая оценка не может превышать 1 балл.

IX.2 АРЕС В ГОСТЯХ У АНТАРЕСА

А.Н. Акиньщиков

Условие. 22 мая 2016 года Марс прошел точку противостояния с Солнцем в созвездии Скорпиона. В этот момент он был примерно на середине своего пути через это созвездие. Считая, что Марс движется в плоскости эклиптики, оцените, когда наступит следующее противостояние Марса, при котором он вновь окажется в созвездии Скорпиона. Известно, что Солнце находится в Скорпионе 7 дней в году.

Решение. То, что Солнце находится в Скорпионе 7 дней в году, означает, что длина дуги эклиптики, проходящая через это созвездие, составляет примерно 7°. То есть, будущее противостояние Марса, о котором идет речь, должно наступить в точке неба, удаленной не более, чем на 3.5° (0.01 от полного круга) от положения в противостоянии в 2016 году.

При решении задачи мы, вообще говоря, должны учитывать эксцентриситет орбиты Марса. Он приводит к тому, что синодический период этой планеты не является величиной постоянной. Например, противостояния 2018 и 2020 годов будет разделять не 780, а целых 809 дней. Однако, нас будут интересовать противостояния вблизи одного положения Марса на орбите примерно в 90° от точки перигелия. Во время противостояния 2016 года Марс располагался как раз на своем среднем расстоянии от Солнца – 1.52 а.е. Его угловая скорость вращения в этот момент также была близка к среднему значению. Поэтому при решении задачи мы будем считать орбитальное вращение Марса равномерным, а синодический период - постоянным.

Средний синодический период Марса составляет 780 дней или 2.135 года. Каждое следующее противостояние происходит через 1.5-2.5 месяца после предыдущего. Через 7-8 синодических периодов, составляющих 15 или 17 лет, противостояния Марса вернутся примерно на те же календарные сезоны и будут происходить в тех же областях неба. Но если мы рассчитаем точную длительность 7 и 8 синодических периодов, мы получим 14.945 и 17.080 лет. Помня о нашем упрощении (постоянство синодического периода), мы получаем, что соответствующие противостояния произойдут в 0.055 и 0.080 доли окружности от точки изначального противостояния. Это соответствует угловым расстояниям Δl в 19.8° и 28.8° к западу и востоку, что существенно больше половины дуги пути Солнца через созвездие Скорпиона. Поэтому через 15 и 17 лет, в 2031 и 2033 годах, противостояния Марса случатся в других созвездиях.

Чтобы облегчить решение задачи, будем проверять не все возможные значения количества синодических периодов, а числа N=7*p*+8*q*, где *p* и *q* – целые числа, отличающиеся не более, чем на единицу. Для таких N мы будем вычислять соответствующую величину времени в годах. Результаты занесем в таблицу:

p	*q*	*N*	T, годы	Δl, часть окружности	Δl,°
1	0	7	14.945	0.055	19.8
0	1	8	17.080	0.080	28.8
1	1	15	32.025	0.025	9.0
2	1	22	46.970	0.030	10.8
1	2	23	49.105	0.105	37.8
2	2	30	64.050	0.050	18.0
3	**2**	**37**	**78.995**	**0.005**	**1.8**
2	3	38	81.130	0.130	46.8

Получаем, что следующее противостояние Марса в созвездии Скорпиона должно случиться через 79 лет («супер-синодический» период Марса), в 2095 году. В реальности оно произойдет 26 мая 2095 года.

Система оценивания (от одного члена жюри). Важным этапом решения является указание того, что эллиптичность орбиты Марса приводит к непостоянству его синодического периода и существенно влияет на даты противостояний и положение Марса на небе во время них. Участники олимпиады могут выполнять решение в общем виде, с учетом эксцентриситета орбиты Марса. Оно засчитывается полностью при условии правильного выполнения.

Если участники олимпиады приводят правильное обоснование, почему задачу можно решить и в более простом виде без учета эксцентриситета, это оценивается в 1 балл. Без этого обоснования последующее решение оценивается в полной мере, но максимальная оценка при правильном решении не превышает 7 баллов.

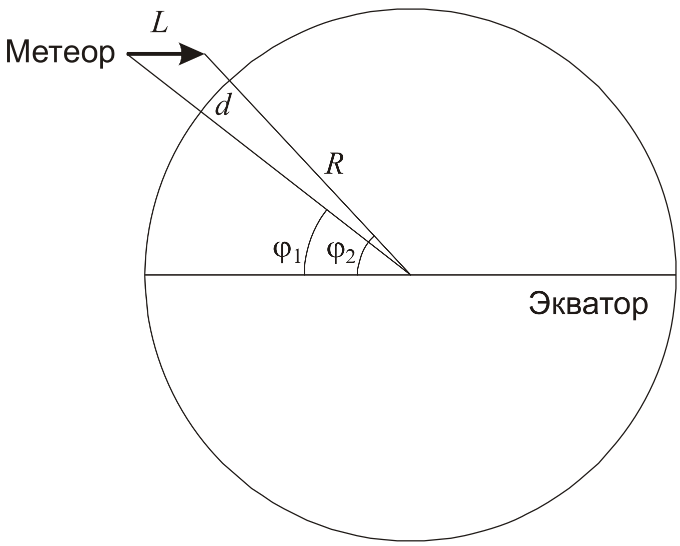
Основная часть решения может вестись разными способами. Можно, как сделано выше, определить максимальное угловое расстояние между положениями Марса в два противостояния (1 балл), из этого вычислить максимальное отклонение N синодических периодов от целого числа лет (3 балла) и далее найти соответствующий промежуток времени (3 балла). Можно, наоборот, исследовать положения Марса через произвольное количество целых лет и найти момент, когда это положение будет близко к созвездию Скорпиона. Однако, в этом случае необходимо учитывать, что найденный момент не будет моментом противостояния, отличаясь от него на несколько дней. За это время Марс успевает сместиться среди звезд. Если этот фактор не учитывается, то даже при правильном ответе за вычислительную часть решения выставляется не более 3 из 7 баллов.

IX.3 МЕТЕОРНЫЙ ПАТРУЛЬ

А.Н. Акиньщиков

Условие. Два наблюдателя располагаются на одном меридиане Земли, в точках с широтами φ_1 и φ_2. Оба запечатлели один и тот же метеор, причем в первом пункте в зенит попало его начало, во втором – конец. Длительность полета метеора составила t, радиант метеорного потока, к которому принадлежал метеор, находится на небесном экваторе. Запишите выражение для скорости метеора, если считать, что она была постоянной.

Решение. Как известно, скорости метеоров не превосходят 72 км/с. Максимальная величина достигается, если метеорное тело движется по параболической орбите (гелиоцентрическая скорость вблизи Земли 42 км/с) точно навстречу Земле (орбитальная скорость 30 км/с). Длительность явления метеора не превосходит нескольких секунд. Поэтому длина полета во время оптической вспышки не более нескольких сот километров, что существенно меньше радиуса Земли. Высота метеора тоже мала по сравнению с радиусом Земли. Все это значительно упрощает картину.



Расстояние между наблюдателями на поверхности Земли с радиусом R равно

$$d = R\,|\varphi_1 - \varphi_2|,$$

а соединяющая их линия может считаться отрезком прямой. Коль скоро радиант потока находится на небесном экваторе, метеорное тело движется вдоль плоскости экватора. Тогда его длина равна

$$L = \frac{d}{|sin\varphi|}; \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

В итоге, скорость метеора составляет

$$v = \frac{L}{t} = \frac{R\left|\varphi_1 - \varphi_2\right|}{t \cdot \left|sin((\varphi_1 + \varphi_2)/2)\right|}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Первая часть решения состоит в обосновании того, что задачу можно решать в «плоском приближении» – длина метеора существенно меньше радиуса Земли. Эта часть решения оценивается в 2 балла. Если это обоснование отсутствует, то участник олимпиады либо должен решать задачу в общем виде с использованием тригонометрии (что оценивается полностью при правильном выполнении), либо эти 2 балла не выставляются, и общая оценка не превосходить 6 баллов.

При дальнейшем решении необходимо учитывать наклон траектории метеора к поверхности Земли, что выражается в множителе sin φ в знаменателе итогового ответа. В качестве широты φ может фигурировать как φ_1, так и φ_2 либо среднее из этих величин, что считается в равной степени правильным. Учет этого фактора оценивается в 4 балла, если он не сделан или сделан некорректно – данные 4 балла не выставляются, но оставшееся решение оценивается в полной мере. Если фактор учтен, но без знака модуля (не учтен случай южного полушария) – из 4 баллов выставляется 2.

Наконец, окончательная запись формулы для скорости оценивается еще в 2 балла. Отсутствие знака модуля в числителе влечет уменьшение оценки на 1 балл.

IX/X.4 ПОИСКИ ДАЛЕКОЙ ПЛАНЕТЫ

О.С. Угольников

Условие. В настоящее время ведутся поиски возможной девятой планеты Солнечной системы, которая может иметь диаметр в 10 диаметров Земли и располагаться в 280 а.е. от Солнца. Астероид какого диаметра в главном поясе будет иметь такую же яркость на Земле в противостоянии, как и эта планета? Отражательную способность поверхности астероида считать аналогичной лунной, а планеты – аналогичной Нептуну. Оба тела располагаются в плоскости эклиптики.

Решение. Пусть тело имеет диаметр D и сферическое альбедо A и обращается вокруг Солнца по круговой орбите на расстоянии L от него. Тогда плотность потока солнечной энергии около этого объекта составит $J/4\pi L^2$, где J – светимость Солнца. Перехватывая эту энергию площадью $\pi D^2/4$, тело будет отражать в пространство ее часть, соответствующую альбедо A. Будем считать, что свет телом отражается изотропно. Так как тело при наблюдении с Земли находится в противостоянии с Солнцем, его расстояние от Земли равно ($L - L_0$), где L_0 – расстояние от Земли до Солнца. В итоге, плотность потока энергии от тела на Земле составит

$$j = \frac{J}{4\pi L^2} \cdot \frac{\pi D^2 A}{4} \cdot \frac{1}{4\pi (L - L_0)^2} = \frac{JD^2 A}{64\pi L^2 (L - L_0)^2}.$$

Сравним теперь астероид главного пояса (индекс 1) и гипотетическую девятую планету Солнечной системы (индекс 2). Так как нас не интересуют абсолютные значения яркости, мы можем выражать расстояния в астрономических единицах, и тогда L_0=1, а также опустить все константы в предыдущем выражении. Условие одинакового видимого блеска на Земле выражается как

$$\frac{D_1^2 A_1}{L_1^2 (L_1 - 1)^2} = \frac{D_2^2 A_2}{L_2^2 (L_2 - 1)^2}.$$

Отсюда мы получаем выражение для диаметра астероида

$$D_1 = D_2 \frac{L_1 (L_1 - 1)}{L_2 (L_2 - 1)} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}.$$

В качестве расстояния от Солнца до главного пояса астероидов L_1 возьмем 2.8 а.е. или $L_2/100$. Величина D_1 оказывается равной 15 км.

Система оценивания (от одного члена жюри). Основой решения задачи является зависимость яркости планеты в противостоянии от ее диаметра, альбедо и расстояния от Солнца. Она может быть выведена или взятая как известная, ее правильная полная запись оценивается в 4 балла. Если при этом не учтен фактор альбедо, оценка снижается на 2 балла, но дальнейшие вычисления (с ответом около 7-8 км) оцениваются в полной мере.

Если неверно учтена зависимость от расстояния L – опущен один из множителей L или $(L–1)$ и получен ответ около 2000 км – за все решение выставляется не более 2 баллов. Если зависимости получены правильно, но опущено слагаемое «–1», то это не является ошибкой для планеты, но уменьшает оценку на 2 балла в случае астероида. В качестве расстояния от Солнца до главного пояса астероидов участники могут брать величины от 2.0 до 3.3 а.е, в противном случае оценка уменьшается на 2 балла. При выходе астероида из пространства между орбитами Марса и Юпитера оценка уменьшается на 4 балла.

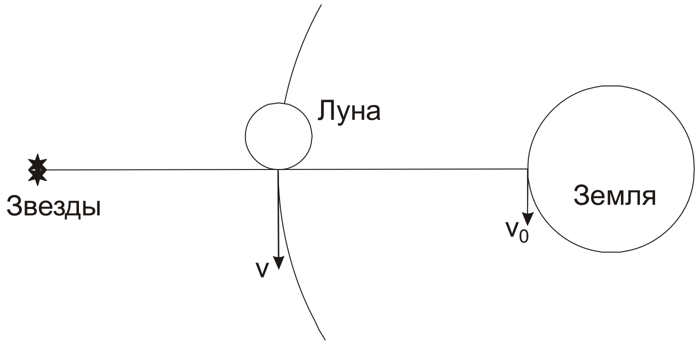
Вычисление диаметра астероида оценивается еще в 4 балла. Если при решении диаметр путается с радиусом – оценка уменьшается на 2 балла.

IX.5 ДВОЙНАЯ СИСТЕМА ЗА ЛУНОЙ

О.С. Угольников

Условие. Двойная система из звезд солнечного типа имеет параллакс 0.1″. При центральном покрытии Луной, видимом в зените с экватора Земли, звезды скрылись за лунным лимбом с интервалом 1 секунда. Найдите минимальный период обращения звезд в системе. Наклоном орбиты Луны к экватору и ее эксцентриситетом пренебречь.

Решение. Покрытие двойной звезды Луной наблюдается на экваторе, а Луна располагается в зените. Так как мы пренебрегаем наклоном орбиты Луны к экватору, мы можем считать, что скорость Луны v и наблюдателя на Земле v_0 сонаправлены.



Считая орбиту Луны круговой с радиусом L и обозначив ее орбитальный период через S, определим угловую скорость ее перемещения среди звезд на небе:

$$\omega = \frac{v - v_0}{L - R} = \frac{\dfrac{2\pi L}{S} - \dfrac{2\pi R}{S_0}}{L - R} = \frac{2\pi}{S} \cdot \frac{L - R(S/S_0)}{L - R} = 1.48 \cdot 10^{-6}\ \text{c}^{-1} = 0.3''/\text{c}.$$

Здесь R – радиус Земли, S_0 – период ее осевого вращения. Итак, минимальное угловое расстояние ρ между звездами, если предположить, что они располагались вдоль видимого радиуса диска Луны, равно 0.3″. Обратим внимание, что без учета вращения Земли мы бы получили почти вдвое большую величину (0.55″). Пространственное расстояние между компонентами двойной системы будет минимальным, если обе они располагаются в картинной плоскости. Тогда это расстояние d, выраженное в астрономических единицах, будет равно ρ/π=3. Здесь π – годичный параллакс звезды.

Так как нам нужно найти минимальный период обращения в системе, предположим, что в момент наблюдения звезды были в апоцентрах своих орбит, а в перицентре расстояние между ними будет значительно меньше. Тогда среднее расстояние между звездами a составит $d/2$=1.5 а.е. Суммарная масса системы M равна двум массам Солнца. Пользуясь обобщенным III законом Кеплера, получаем величину минимального периода в годах:

$$T = (a^3/M)^{1/2} \sim 1.3.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение разбивается на несколько этапов:

1. Определение минимального углового расстояния между звездами (3 балла);
2. Определение минимального пространственного расстояния между звездами (2 балла);
3. Вычисление минимального орбитального периода (3 балла).

Если минимальное угловое расстояние между звездами вычислено без учета вращения Земли (с ошибкой почти в 2 раза), то первый этап решения не засчитывается, но второй и второй этап при условии правильного выполнения и ответа около 3 лет оценивается полностью. Если же при выполнении первого этапа делается еще более грубая ошибка, то оценка за третий этап уменьшается до 1 балла. Если в качестве периода обращения Луны участники по ошибке используют синодический период (29.5 суток) – оценка за первый этап уменьшается на 1 балл. Отсутствие слагаемого $-R$ в знаменателе формул (фактор параллакса Луны при расчете угловой скорости) также приводит к уменьшению оценки на 1 балл без влияния на оценки за последующие этапы.

Ошибочное выполнение второго этапа уменьшает максимальную оценку за третий этап также до 1 балла.

На третьем этапе, если в качестве массы M берется одна масса Солнца (т.е. используется простая формулировка III закона Кеплера), оценка за третий этап уменьшается на один балл. При другой ошибке в третьем этапе (неучет возможных эллиптических орбит, ответ около 3.5 лет) максимальная оценка за третий этап составляет 1 балл. При сочетании обеих ошибок (круговые орбиты и M=1) третий этап не оценивается.

IX.6 ВНУТРИ ТУМАННОСТИ

О.С. Угольников

Условие. Планетарная туманность «Кольцо» имеет видимый диаметр 2′ и блеск 9^m. Оцените, насколько светло будет ночью на планете, обращающейся вокруг звезды – ядра этой туманности. Сравните по освещенности ночное небо на этой планете с земным ночным небом.

Решение. Самый простой способ решения этой задачи – учесть тот факт, что поверхностная яркость протяженного объекта не зависит от расстояния до него. Действительно, приблизившись к объекту вдвое, мы обнаружим, что он стал вчетверо ярче и занимает вчетверо большую угловую площадь на небе. Мысленно разбив сферическую туманность M57 на маленькие элементы и рассматривая каждый из них, как отдельный протяженный объект, можно сделать вывод, что поверхностная яркость туманности будет такой же и при наблюдении изнутри. Здесь нужно оговориться, что туманность разреженна, и ее газ не поглощает собственное излучение.

Теперь нам остается вычислить звездную величину всего небосвода площадью 2π стерадиан, если его поверхностная яркость такая же, как у M57 в небе Земли. Угловая площадь туманности на Земле равна

$$\sigma = \pi\delta^2/4 = 2.7\cdot10^{-7} \text{ стер.}$$

Здесь δ – угловой диаметр туманности в радианах. Звездная величина полусферы внутри туманности составит

$$M = m - 2.5\lg\frac{2\pi}{\sigma} = m - 2.5\lg\frac{8}{\delta^2} = -9.5.$$

Эта звездная величина примерно соответствует Луне в фазе первой или последней четверти. Звездная величина одной квадратной секунды составит примерно 19^m. Получается, что небо на планете внутри туманности ярче ночного безлунного неба на Земле, но существенно слабее земного неба в полнолуние. На этом небе вполне можно наблюдать большое количество звезд и других астрономических объектов.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на три основных этапа:

1. Вывод или указание о неизменности поверхностной яркости M57 при приближении к ней (3 балла);
2. Оценка яркости ночного неба внутри M57 (как звездной величины полусферы, с квадратного градуса, с квадратной секунды – достаточно одной любой оценки, 3 балла); полная сфера – балл.
3. Вывод о соотношении яркости ночного неба с земным (2 балла, достаточно сравнения с безлунным небом либо сравнения с небом в полнолуние).

Участник олимпиады может не делать вывод этапа 1 и переходить к непосредственному вычислению яркости ночного неба (этап 2). Это усложняет вычисления, но не является ошибкой и оценивается полным баллом (6 баллов за этапы 1+2) при условии правильности выводов и вычислений. Два балла за третий этап выставляются только при условии правильно выполненной предыдущей части задачи.

При использовании необоснованных дополнительных предположений относительно туманности (ее яркость, расстояние и т.д.) общая оценка не превышает 2 баллов. Использование грубых упрощений при расчете яркости туманности с малого расстояния уменьшают оценку на 4 балла.

При получении заведомо неверного ответа (например, небо будет светлым, как днем на Земле) общая оценка не может превышать 2 баллов вне зависимости от причины сделанной ошибки.

X/XI.1 НАЗЕМНАЯ ФОТОМЕТРИЯ

Е.Н. Фадеев

Условие. В фокальной плоскости телескопа с диаметром объектива 20 см изображение звезды выглядит в виде равномерно засвеченного пятна диаметром 20 мкм. Установленная в фокальной плоскости ПЗС-матрица фиксирует, что в пятне звезды регистрируется в 40 раз больше квантов света, чем в таком же по площади участке фона. Определить звездную величину звезды и относительное отверстие телескопа. Диаметр атмосферного диска дрожания точечного источника равен 2″, а яркость фона неба составляет 4.5^m с квадратного градуса.

Решение. Звезда – точечный источник. В условии сказано, что из-за влияния атмосферы каждая точка видна в виде диска с угловым диаметром 2″ или 10^{-5} радиан. Линейный диаметр изображения объекта в фокальной плоскости a связан с его угловым размером α по формуле:

$$\alpha = a/f.$$

Здесь f – фокусное расстояние объектива, которое получается равным 2 м. Относительное отверстие – размер апертуры, выраженный в ее фокусных расстояниях (отношение диаметра объектива к фокусному расстоянию), оно равно 1/10 (f/10).

Для ответа на второй вопрос надо заметить, что изображение звезды формируется не только светом звезды, но и фоном. Однако, по условию задачи звезда в 40 раз ярче, поэтому вклад фона в изображение звезды можно не учитывать. С площади диска дрожания звезды, равного $\pi\alpha^2/4$ или $2.4\cdot10^{-7}$ квадратного градуса, фон будет давать звездную величину

$$m = 4.5 - 2.5\ \lg 2.4\cdot10^{-7} = 21.$$

Изображение от звезды в 40 (если быть совсем точным, то в 39) раз ярче, что соответствует разнице в 4 звездных величины. Итак, звезда имеет блеск 17^m.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на две независимые части, которые могут выполняться в произвольном порядке. Каждая из них оценивается в 4 балла. Одна из них связана с определением относительного отверстия. Для этого необходимо найти фокусное расстояние объектива, что оценивается в 2 балла. Окончательный вывод оценивается еще в 2 балла.

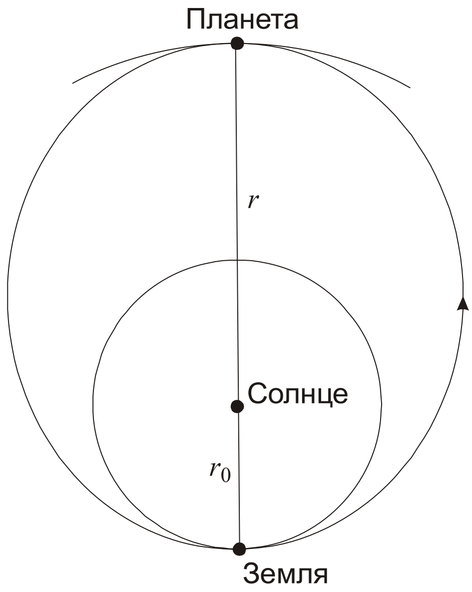
Вторая часть решения связана с вычислением звездной величины звезды. Для этого нужно определить площадь, занимаемую изображением звезды в произвольных единицах, что оценивается в 1 балл. Он не выставляется при отсутствии множителя (π/4) или при сложении радиуса с радиусом кружка Эри (0.7″). Далее находится звездная величина фона с этой площади (2 балла) и, наконец, звездная величина звезды (1 балл). Альтернативный порядок действий предусматривает вычисление звездной величины фона с квадратной секунды (2 балла), звездной величины звезды с квадратной секунды (1 балл) и полной звездной величины звезды (1 балл). Ошибки, сделанные на начальных этапах, могут приводить к снижению оценок за последующие этапы в случае существенного расхождения численного ответа с правильным.

X.2 КОРОТКИЙ ВИЗИТ

О.С. Угольников

Условие. Аппарат совершил перелет с Земли к некоторой другой большой планете Солнечной системы по энергетически оптимальной траектории. Пролетев рядом с планетой, он сразу же отправился в обратный путь к Земле. В течение всей миссии аппарат, не включая двигателей, совершил один оборот вокруг Солнца и вернулся на нашу планету в точке старта миссии. Для какой ближайшей к Солнцу планеты такое возможно? Орбиту Земли считать круговой, действие планеты на аппарат не учитывать.

Решение. Как известно, энергетически оптимальная траектория – эллипс, перигелий которого располагается на орбите Земли, афелий – на орбите планеты. Коль скоро аппарат после сближения с планетой продолжил движение по той же орбите и достиг Земли в той же точке, в которой он стартовал, можно сделать вывод, что весь полет занял целое число лет. Очевидно, что это невозможно в случае полета к внутренней планете, так как в этом случае полет занял бы меньше года. Нам необходимо рассмотреть случай внешней планеты. Изобразим схему всей миссии:



Обозначим расстояние от Солнца до планеты (в астрономических единицах) через r. Большая полуось орбиты аппарата равна $(r+1)/2$, а время всей миссии, выраженное в годах, составляет:

$$t = \left(\frac{r+1}{2}\right)^{3/2} = N.$$

Здесь N – целое число. Выражая t через N, получаем:

$$r = 2N^{2/3} - 1.$$

Определим величину r для целых значений N:

t, годы	r, а.е.	t, годы	r, а.е.
1	1.00	7	6.32
2	2.17	8	7.00
3	3.16	9	7.65
4	4.04	10	8.28
5	4.85	11	8.89
6	5.60	**12**	**9.48**

Мы видим, что подобный полет не мог происходить к Марсу (диапазон расстояний r от 1.38 до 1.67 а.е.) и к Юпитеру (от 4.95 до 5.45 а.е.). А вот к Сатурну такая миссия возможна, так как он может располагаться в 9.48 а.е. от Солнца. Весь полет туда и обратно занял бы 12 лет.

Система оценивания (от одного члена жюри). В начале решения участники олимпиады должны указать (текстом и рисунком), что вся траектория аппарата во время миссии есть эллипс с точкой перигелия у орбиты Земли и точкой афелия у орбиты планеты. Этот вывод оценивается в 1 балл. Выражение для продолжительности миссии в годах оценивается еще в 3 балла. Решение уравнения и нахождение ближайшей возможной планеты оценивается в 4 балла. Этот анализ должен включать в себя внутренние планеты или содержать вывод, почему для них эта ситуация невозможна, в противном случае за третий этап выставляется не более 2 баллов. Если числа $r(N)$ получены верно, но планета не определена правильно из-за ошибок в вычислениях диапазонов расстояний (либо вообще не учтены эксцентриситеты), то оценка за 3 этап составляет не более 1 балла.

X/XI.3 НЕЙТРИННЫЙ ДЕТЕКТОР

С.Г. Желтоухов

Условие. Оцените длину свободного пробега нейтрино малых энергий в галлии, если нейтринный детектор, содержащий 60 тонн галлия, позволит регистрировать одно низкоэнергетическое солнечное нейтрино в сутки. При превращении четырех протонов в атом гелия выделяется 26.8 МэВ энергии и два нейтрино энергией примерно 0.3 эВ каждое. Плотность галлия составляет 6 г/см^3.

Решение. Пусть один атом галлия взаимодействует с нейтрино в том случае, если оно пролетает на расстоянии не больше r от центра атома. Другими словами, атом «перехватывает» нейтрино площадью $\sigma = \pi r^2$, которая называется эффективным сечением взаимодействия. Если нейтрино за малое время Δt пролетает со скоростью света c путь $\Delta l = c\Delta t$, то малая вероятность его взаимодействия с атомом равна среднему числу атомов в трубке длиной Δl и сечением σ:

$$\Delta P = N\,\sigma\,\Delta l = N\,\sigma\,c\,\Delta t.$$

Здесь N – концентрация атомов. Длина свободного пробега l – такое расстояние, на котором ожидаемое число встреченных атомов достигнет единицы:

$$l = 1 / N\sigma.$$

Пусть на Землю летят солнечные нейтрино с плотностью потока F (количество нейтрино, пролетающее через площадку 1 м^2 за 1 сек, размерность м$^{-2}$сек$^{-1}$). Тогда объемная концентрация нейтрино будет равна

$$n = F / c.$$

Обозначим объем галлиевого детектора как V. В любой момент времени количество нейтрино внутри детектора будет равно nV. Суммарный путь, пройденный всеми этими нейтрино за время T, составит

$$L = n\,V\,c\,T = F\,V\,T.$$

Если за время T фиксируется только одно взаимодействие, значит, суммарный путь L равен длине свободного пробега l, которую нам и нужно найти. Объем детектора есть отношение его массы M к плотности r и составляет 10 м^3 (значение плотности нужно перевести в систему СИ), время T также известно. Остается найти плотность потока нейтрино F.

Самый простой способ сделать это следующий. Нам известно, что за один цикл протон-протонных реакций выделяется энергия

$$E = 2.68\cdot10^{7}\ \text{эВ} = (2.68\cdot10^{7}\cdot 1.6\cdot10^{-19})\ \text{Дж} = 4.29\cdot10^{-12}\ \text{Дж}.$$

При этом же выделяются два нейтрино. И нейтрино, и энергия Солнца распространяются от Солнца изотропно. В итоге, каждому нейтрино соответствует энергия $E/2$. Зная плотность потока энергии от Солнца на Земле (солнечную постоянную) F_S, мы находим плотность потока нейтрино:

$$F = \frac{F_S}{E/2} = 6.34\cdot10^{14}\ \text{м}^{-2}\text{с}^{-1}.$$

В итоге, длина свободного пробега оказывается равной

$$L = F\,M\,T / \rho = 5.5\cdot10^{20}\ \text{м} = 18\ \text{кпк}.$$

Получается, чтобы зафиксировать все солнечные нейтрино, нужен галлиевый детектор с такой же плотностью и размером порядка нашей Галактики! К счастью, для нейтрино высоких энергий вероятность их реакции с веществом сильно возрастает, что облегчает их регистрацию.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задания разделяется на два основных этапа, которые могут выполняться в разной последовательности. Первый этап состоит в вычислении плотности потока нейтрино вблизи Земли. Она может быть определена как числом, так и математическим выражением, которое подставляется далее для получения окончательного ответа. Плотность потока можно вычислять через солнечную постоянную (как сделано выше), так и через величину полного количества нейтрино, выделяемого Солнцем в единицу времени. Весь этап оценивается в 4 балла. Если при решении делается ошибка в связи светимости и темпа испускания нейтрино (например, в 2 раза в процессе анализа протон-протонной реакции), то за этот этап выставляется только 2 балла, но оставшееся решение оценивается в полной мере. Более грубые ошибки (в частности, как результат неверного перевода единиц величин) могут быть основанием для снижения оценки за этап до 0 баллов.

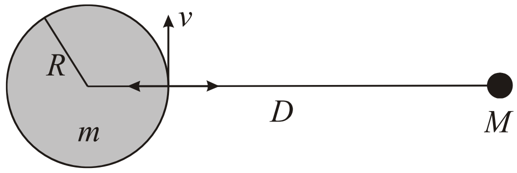
Второй этап решения состоит в связи длины свободного пробега, плотности потока нейтрино и объема детектора. Эта связь может выводиться из разных принципов (в том числе, из принципа размерности). Корректный вывод этой связи оценивается в 3 балла. Наконец, 1 балл выставляется за формулировку ответа. Он ставится только при условии правильного численного значения длины свободного пробега.

X/XI.5 ОПАСНОЕ СБЛИЖЕНИЕ

О.С. Угольников

Условие. Шаровое звездное скопление радиусом 20 пк и массой 400 тысяч масс Солнца пролетает вблизи сверхмассивной черной дыры в центре нашей Галактики с массой 4 миллиона масс Солнца. При каком максимальном расстоянии между центром скопления и черной дырой скопление может начать терять массу? Взаимодействие скопления с другими телами вблизи центра Галактики, кроме черной дыры, и эффекты тесных сближений звезд в скоплении не учитывать.

Решение. Информации, заданной в условии, недостаточно, чтобы в точности воссоздать картину всех явлений, которые произойдут при сближении скопления с черной дырой. Прежде всего, неизвестна скорость, с которой скопление пролетает мимо черной дыры. Если эта скорость невелика, то некоторые звезды скопления могут перейти на орбиту вокруг черной дыры. При большей скорости звезды могут просто покинуть скопление. При еще большей скорости действие поля тяжести черной дыры будет кратковременным, и потеря массы будет возможна только при небольших расстояниях между черной дырой и скоплением. Оценим из общих соображений максимальное расстояние, при котором какие-либо звезды скопления смогут покинуть его под действием черной дыры.



Рассмотрим звезды, расположенные на краю скопления. Они двигаются вокруг его центра либо по вытянутым орбитам, которые можно считать эллиптическими лишь в некотором приближении, либо по круговым орбитам. В первом случае они располагаются вблизи апоцентров своих орбит, и их скорости меньше, чем в случае кругового движения. Итак, максимальная скорость звезды на краю скопления равна ее круговой скорости:

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{R}}.$$

Здесь m и R – масса и радиус скопления. Предположим теперь, что на расстоянии D от центра скопления в том же направлении, что и рассматриваемая звезда, располагается черная дыра с массой M. Результирующее ускорение от гравитационных сил, действующих на звезду, будет равно

$$g = \frac{Gm}{R^2} - \frac{GM}{(D-R)^2} = \frac{Gm'}{R^2}.$$

Здесь мы сравниваем его с действием некоторой эффективной массы m' в центре скопления, которая равна

$$m' = m - \frac{MR^2}{(D-R)^2}.$$

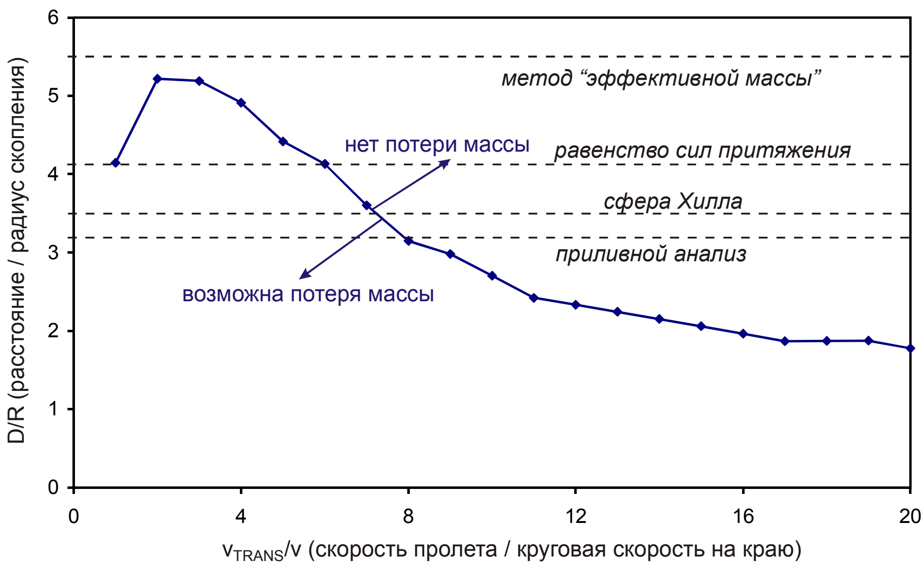
Очевидно, если сила притяжения черной дыры скомпенсирует силу притяжения скопления, и m' обратится в ноль, звезда может покинуть скопление. Но если действие черной дыры займет некоторое время, звезда может уйти из скопления и при положительной массе m'. Для этого ее скорость должна превысить вторую космическую для этой массы:

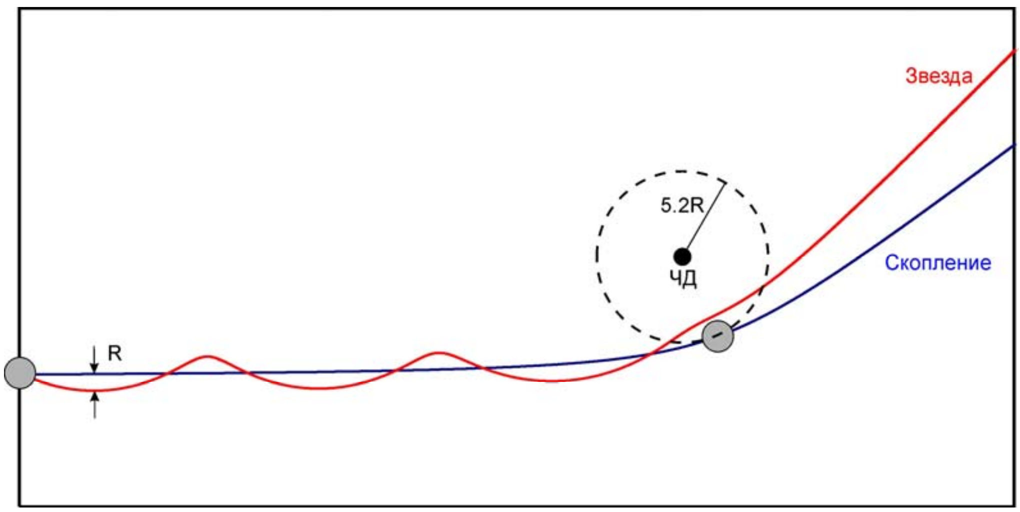
$$v = \sqrt{\frac{Gm}{R}} \geq \sqrt{\frac{2Gm'}{R}}.$$

Отсюда мы получаем:

$$m' \leq m/2; \quad \frac{R^2}{(D-R)^2} \geq \frac{m}{2M}; \quad D \leq R \cdot \left(\sqrt{\frac{2M}{m}} + 1 \right) = 5.5R = 110\ пк.$$

Легче всего покинуть скопление будет звездам, которые в момент сближения будут двигаться относительно центра скопления в ту же сторону, что и черная дыра. Численное моделирование движения звезды в поле двух центров тяжести для разных значений их относительных скоростей показывает, что полученная оценка близка к истине. Если скорость движения скопления относительно черной дыры не очень велика, то небольшое количество звезд могут покидать скопление при его приближении к черной дыре примерно на 5.0 – 5.5 радиусов скопления, в чем можно убедиться из графика. На втором рисунке показаны траектории скопления и покидающей его звезды при наибольшем расстоянии от черной дыры.





Другой способ понять, на каких расстояниях звезда может покинуть скопление – представить притяжение черной дыры как приливную силу. Будем считать, что звезда на краю скопления покинет его, если приливное ускорение (разность ускорений притяжения черной дыры на краю и в центре скопления) будет не меньше ускорения притяжения центра скопления:

$$\frac{GM}{(D-R)^2} - \frac{GM}{D^2} \geq \frac{Gm}{R^2}.$$

Если D существенно превосходит R, то это выражение упрощается:

$$\frac{2GMR}{D^3} \geq \frac{Gm}{R^2}.$$

Отсюда

$$D \leq R \cdot \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3} = 2.7R.$$

Мы видим, что предположение $R \ll D$ не вполне оправдано. Точный анализ уравнений выше дает ограничение $D \leq 3.2R \sim 65$ пк. Близкие значения мы получим, если предположим, что для потери массы внешний край скопления должен попасть во внутреннюю точку Лагранжа системы «черная дыра – скопление». Тогда приближенный анализ дает

$$D \leq R \cdot \left(\frac{3M}{m}\right)^{1/3} = 3.1R,$$

а точный численный расчет: $D \leq 3.5R$. Величина D оказалась примерно в полтора раза меньше, чем при вычислении первым методом и при численном анализе. Это связано с тем, что «приливной» метод не учитывает возможное движение звезд в скоплении и в большей степени относится к тем звездам, которые в момент сближения с черной дырой будут в апоцентре своих орбит и почти неподвижны относительно центра скопления. Так как в задаче требуется найти максимальное расстояние, при котором скопление начнет терять массу, первый метод является более правильным.

Система оценивания (от одного члена жюри). В задаче не существует единственно точного решения, оценка должна определяться обоснованностью метода, предложенного участником олимпиады, правильностью его математической реализации и адекватностью ответа. Максимальная оценка выставляется, если метод учитывает движение звезд в скоплении и приводит к ответу $D \leq 5\text{-}6R$. При этом он не должен базироваться на каком-то известном значении скорости скопления относительно черной дыры и не должен предполагать, что сила притяжения от черной дыры должна превысить силу притяжения от скопления.

При использовании приливного метода определения расстояния или аналогичного метода, не учитывающего движения звезд, максимальная оценка составляет 4 балла при условии правильного ответа ($D \leq 3R$). Если участник олимпиады при этом получает большие значения D как следствие ошибок при решении, оценка еще уменьшается в зависимости от характера ошибки. Использование упрощающей модели $R \ll D$ в этом случае без проверки ее точности уменьшает оценку еще на 1 балл (максимум – 3 балла).

Если участник олимпиады напрямую сравнивает силы притяжения от скопления и черной дыры, получая в итоге ограничение $D \le 4.1R$, максимальная оценка также составляет 4 балла.

В случае получения заведомо неверного ответа (максимальное расстояние D меньше $2R$ или больше $10R$) оценка снижается вплоть до нуля вне зависимости от используемого метода.

X.6 ДАЛЕКАЯ ЗЕМЛЯ

О.С. Угольников

Условие. Считая, что светимость L и масса M желтых и красных карликов связаны как $L \sim M^4$, определите, у каких звезд можно найти планету с массой, альбедо и температурными условиями, аналогичными Земле, используя спектрограф с разрешением 10^8.

Решение. Разрешение спектрографа R есть отношение длины волны λ, на которой ведутся наблюдения, к минимальной разнице длин волн спектральных линий $\Delta\lambda$, которые можно зафиксировать по отдельности:

$$R = \lambda/\Delta\lambda.$$

При таком разрешении у объекта можно измерить лучевую скорость, если она приводит к смещению спектральной линии на величину больше $\Delta\lambda$, то есть:

$$\frac{V}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ge \frac{1}{R}.$$

Предположим, что вокруг звезды с массой M обращается планета со значительно меньшей массой m. Расстояние от планеты до звезды составляет D. Если считать орбиту круговой, то скорость движения планеты составит

$$v = \sqrt{\frac{GM}{D}}.$$

Звезда также будет двигаться относительно общего с планетой центра тяжести. Ее скорость V по направлению противоположна скорости v. Сам центр масс не вращается, поэтому $MV = mv$. Скорость звезды будет во столько же раз меньше скорости планеты, во сколько раз звезда массивнее планеты:

$$V = v\frac{m}{M} = \sqrt{\frac{Gm^2}{MD}}.$$

Чтобы зафиксировать эту скорость спектрографом, описанным в условии, эта скорость должна создавать эффект Доплера, описанный выше, то есть:

$$\sqrt{\frac{Gm^2}{MD}} \ge \frac{c}{R}.$$

В условии сказано, что планета по своим свойствам похожа на Землю, то есть, она должна получать от звезды столько же тепла, сколько Земля от Солнца. Это количество тепла пропорционально светимости звезды и обратно пропорционально расстоянию до нее. Обозначив массу и светимость Солнца через M_0 и L_0, а расстояние Земли до Солнца – через D_0, записываем это условие математически:

$$\frac{L}{D^2} = \frac{L_0}{D_0^2}.$$

С учетом соотношения «масса-светимость» получаем:

$$D = D_0\sqrt{\frac{L}{L_0}} = D_0\left(\frac{M}{M_0}\right)^2.$$

Подставим это в неравенство, полученное ранее:

$$\sqrt{\frac{Gm^2M_0^2}{M^3D_0}} \ge \frac{c}{R}.$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{M}{M_0}\right)^3 \le \frac{R^2Gm^2}{c^2D_0M_0} = \left(R\frac{m}{M_0}\cdot\frac{v_0}{c}\right)^2.$$

Здесь v_0 – орбитальная скорость Земли. Учитывая, что отношение (m/M_0) составляет $3\cdot10^{-6}$, а (v_0/c) равно 10^{-4}, получаем, что планету с указанными свойствами можно будет открыть у звезд с массой не более 0.1 массы Солнца.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи подразумевает использование четырех базовых факторов, первые три из которых могут идти в произвольном порядке:

1. Соотношение орбитальных скоростей планеты и звезды, вывод выражения для скорости звезды.
2. Минимальная измеряемая скорость звезды, исходя из величины спектрального разрешения;
3. Соотношение между радиусом орбиты планеты и светимостью (и, следовательно, массой) звезды;
4. Получение ограничения сверху на массу звезды (ответ должен быть сформулирован как неравенство либо должно быть указано, что найдена *максимальная* масса звезды).

Каждый из этапов равнозначен по своему вкладу в решение, и его выполнение оценивается в 2 балла. Однако, ошибка, сделанная на каком-либо этапе, может приводить к снижению оценки и за другие этапы, если в итоге получается заведомо неверный вывод в решении. Так, четвертый (финальный) этап не засчитывается полностью в каждом из следующих случаев:

1. Численный ответ не получен;
2. Ответ не выглядит (математически или в тексте) как ограничение на массу звезды сверху;
3. Пороговое значение массы не соответствует звездным массам (менее 0.05 массы Солнца);
4. Пороговое значение массы, наоборот, слишком велико и не соответствует красным карликам (более 1 массы Солнца).

Последний этап также не оценивается, если ответ (даже близкий к правильному) получается на основе неверных рассуждений и вычислений.

При решении участник олимпиады может спутать скорости звезды и планеты, что приведет к очень высокому верхнему пределу на массу звезд (без множителя m/M_0 в финальной формуле и численному ответу около 500 масс Солнца). В этом случае ввиду заведомо неверного ответа общая оценка за решение не может превышать 2 баллов. Она не увеличивается и в том случае, если итоговая масса оказывается меньше вследствие математических ошибок при решении.

При решении задачи участник олимпиады может предполагать, что достаточно различить спектральную линию звезды при двух противоположных значениях ее скорости, что эквивалентно увеличению разрешения R в 2 раза и итоговой пороговой массы – в 1.6 раза. Эта ошибка считается несущественной и в случае правильных вычислений не влияет на оценку. Решение может производиться полностью в системных единицах без выражения масс в массах Солнца и радиусов орбит – в астрономических единицах. Данный подход более сложен для вычислений, но также правилен.

XI.2 ВУЛКАНИЧЕСКИЙ ХОЛОД

М.И. Волобуева

Условие. В 1815 году на индонезийском острове Сумбава произошло извержение вулкана Тамбора, что привело к катастрофическим последствиям по всему земному шару. В 1816 году средняя температура Земли упала на 0.7°C, а в Европе и Северной Америке заморозки и снег наблюдались даже в июле (так называемый «год без лета»). Оцените, насколько изменилось сферическое альбедо Земли вследствие загрязнения атмосферы вулканическими выбросами, если известно, что сейчас оно составляет 0.306. Считайте, что вклад парникового эффекта в среднюю температуру Земли не изменился.

Решение. Пусть парниковый эффект увеличивает среднюю температуру Земли на некоторую фиксированную величину, т.е. разница между фактической средней температурой T у поверхности Земли и эффективной температурой T_E постоянна и равна ΔT_G. Запишем уравнение теплового баланса для Земли:

$$E\,(1-A)\,\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma\,(T-\Delta T_G)^4 = 4\pi R^2 \sigma T_E^4.$$

Здесь E – солнечная постоянная, R и A – радиус и альбедо Земли соответственно. После извержения вулкана альбедо Земли увеличится на ΔA, а температура – уменьшится на ΔT. Уравнение примет вид:

$$E\,(1-(A+\Delta A))\,\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma\,(T-\Delta T-\Delta T_G)^4.$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем:

$$\frac{1-(A+\Delta A)}{1-A} = \frac{(T-\Delta T-\Delta T_G)^4}{(T-\Delta T_G)^4};$$

$$1-\frac{\Delta A}{1-A} = \left(1-\frac{\Delta T}{T-\Delta T_G}\right)^4.$$

Учитывая, что изменение температуры мало, по формуле приближенного вычисления получаем

$$1-\frac{\Delta A}{1-A} = 1-\frac{4\Delta T}{T-\Delta T_G} = 1-\frac{4\Delta T}{T_E}.$$

Увеличение альбедо Земли составляет

$$\Delta A = \frac{4\Delta T(1-A)}{T_E} = 4\Delta T(1-A)\cdot\left(\frac{4\sigma}{E(1-A)}\right)^{1/4} = 0.008.$$

Заметим, что задачу можно решать и другим способом, например, приняв, что атмосфера задерживает некоторую фиксированную долю излучения. Тем не менее, выбор модели парникового эффекта мало повлияет на ответ, так как относительное изменение температуры Земли достаточно мало.

Система оценивания (от одного члена жюри). Основой решения задачи является уравнение теплового баланса Земли. Его верная запись оценивается в 2 балла. Если при этом не учитывается поправка за парниковый эффект, то эти 2 балла не выставляются, также не засчитывается балл за окончательный ответ. Если при записи уравнения допускается еще более грубая ошибка, то итоговая оценка еще более снижается.

Определение эффективной температуры Земли (численно или в виде формулы) оценивается в 2 балла при условии обоснований. Запись выражения для изменения альбедо оценивается в 3 балла. При ошибке в знаке изменения альбедо из этих трех баллов выставляется только 1 балл. Если участник не пользуется формулами приближенных вычислений и решает уравнение 4-й степени, то в случае правильности и корректности вычислений оценка не снижается. Вычисление окончательного ответа оценивается в 1 балл при условии учета парникового эффекта и правильности всех вычислений.

XI.4 КРАСНЫЙ СИРИУС

Е.Н. Фадеев

Условие. Предположим, что Сириус вскоре погрузится в плотное облако межзвездной пыли. На сколько упадет его блеск в полосе V, если он станет такого же цвета, как и Арктур? Удельное поглощение в пыли обратно пропорционально длине волны в степени 1.33. Длина волны середины диапазона V – 540 нм, диапазона B – 442 нм. Видимые звездные величины Сириуса и Арктура в полосе V составляют -1.46^m и -0.04^m, показатели цвета 0.00^m и $+1.23^m$ соответственно.

Решение. Как известно, действие поглощения приводит к увеличению звездной величины на некоторую величину *E*, пропорциональную плотности пыли и длине луча света через нее. Определим, как будут соотноситься величины поглощений в полосах B и V при прохождении света через облако пыли:

$$\frac{E_B}{E_V} = \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_V}\right)^{-1.33} = 1.305.$$

Отсюда мы можем выразить связь изменения показателя цвета с поглощением в полосе V:

$$\frac{E_{B-V}}{E_V} = \frac{E_B - E_V}{E_V} = 0.305.$$

Если облако пыли настолько плотное, что показатель цвета Сириуса B – V увеличился на 1.23^m, его видимая звездная величина в полосе V должна увеличиться на $1.23/0.305 = 4.03^m$. Таким образом, Сириус предстал бы красной звездой с блеском 2.57^m.

Система оценивания (от одного члена жюри). Для решения задачи участники олимпиады должны установить связь между изменением звездной величины в системе V и показателя цвета B – V вследствие межзвездного поглощения. Правильное выполнение оценивается в 5 баллов. Вычисление звездной величины Сириуса в облаке пыли либо его уменьшения из-за пыли (любой из двух вариантов) оценивается в 3 балла.

XI.6 СРЕДИ МНОЖЕСТВА ПАР

О.С. Угольников

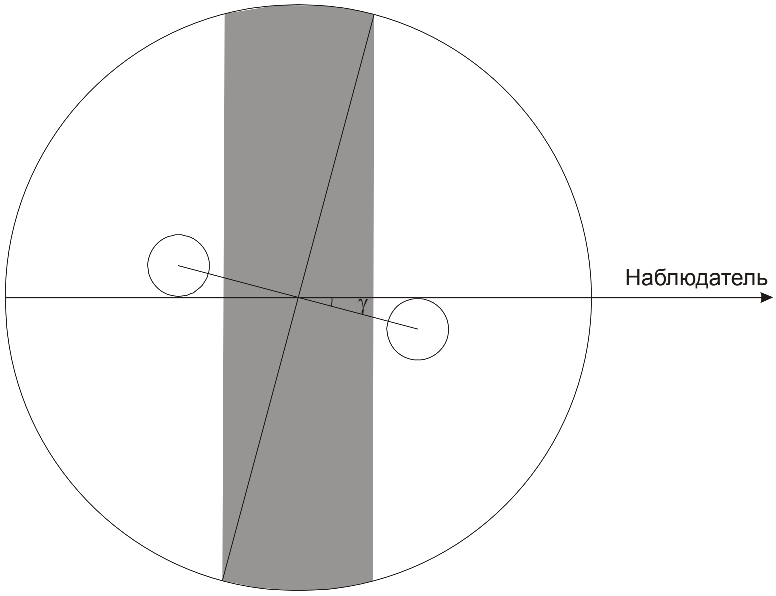
Условие. Предположим, что в нашей Галактике существует особый класс абсолютно одинаковых двойных систем с одинаковыми компонентами, подобными Солнцу, удаленными друг от друга на 1 а.е. и обращающимися по круговым орбитам. Концентрация таких систем в пространстве постоянна (в частности, не зависит от расстояния от плоскости диска Галактики) и равна 0.001 пк$^{-3}$. В Вашем распоряжении имеются обсерватории в северном и южном полушариях Земли. На каждой из них есть фотометр, которому доступны звезды до 15^m, имеющий точность 0.001^m, спектрограф с разрешением 10^5 и предельной величиной 12^m и астрограф с угловым разрешением 0.1″ и предельной звездной величиной 20^m. Сколько таких пар будет открыто как спектрально-двойные? оптические двойные? затменные переменные? Межзвездным поглощением света пренебречь.

Решение. Нам известны характеристики звезд в системе и их орбиты. Но при этом неизвестная ориентация орбит в пространстве, поэтому будем считать ее случайной. Проще всего ориентацию задавать положением оси орбит, которая ориентирована случайно по полусфере.

Проще всего определить количество систем, которые будут открыты как оптические двойные. Вне зависимости от ориентации, в какой-то момент времени отрезок, который соединяет звезды, окажется в картинной плоскости. Его длина составляет 1 а.е., и под углом 0.1″ такой отрезок виден с расстояния 10 пк. Каждая из звезд будет иметь с такого расстояния блеск около 5^m, что более чем достаточно для наблюдений с астрографом. В итоге, разрешить можно будет все системы с концентрацией n внутри сферы с радиусом r_O=10 пк и центром в Солнце. Их количество составит

$$N_O = \frac{4}{3}\pi \cdot r_O^3 n \approx 4.$$

Затменные системы можно зарегистрировать фотометром. Его точность составляет 0.001^m, и мы можем считать, что для регистрации достаточно лишь небольшого частного затмения – видимые диски звезд могут только коснуться друг друга. В этом случае угол между линией, соединяющей центры звезд, и направлением на наблюдателя равен



$$\gamma = \frac{2R}{L} = 0.0094 \text{ рад}$$

или 0.54° (видимый диаметр Солнца с расстояния 1 а.е.). Такие затмения могут наблюдаться, если ось вращения звезд ориентирована на сфере внутри тонкого кольца с угловой шириной 2γ, перпендикулярного направлению к наблюдателю. Вероятность наступления затмений при случайной ориентации оси есть отношение площади этого кольца к площади сферы:

$$P_E = \frac{2\pi \cdot 2\gamma}{4\pi} = \gamma\,.$$

Помимо этого, двойная система должна быть зафиксирована фотометром. Она состоит из двух звезд солнечного типа, и ее абсолютная звездная величина M равна $+4^m$. Определим расстояние, с которого она будет иметь видимую величину 15^m:

$$\lg r_E = 1 + \frac{m - M}{5}; \quad r_E = 1600 \text{ пк.}$$

Число зафиксированных затменных переменных будет равно

$$N_E = \frac{4}{3}\pi \cdot r_E^3 n \cdot \gamma \approx 1.6 \cdot 10^5.$$

Чтобы определить число спектрально-двойных систем, найдем скорости звезд. Это можно сделать из III закона Кеплера, можно напрямую из закона всемирного тяготения, записав выражение для углового ускорения:

$$\frac{G\mu}{R^2} = \frac{v^2}{R/2}; \quad v = \sqrt{\frac{G\mu}{2R}} = 21 \text{ км/с.}$$

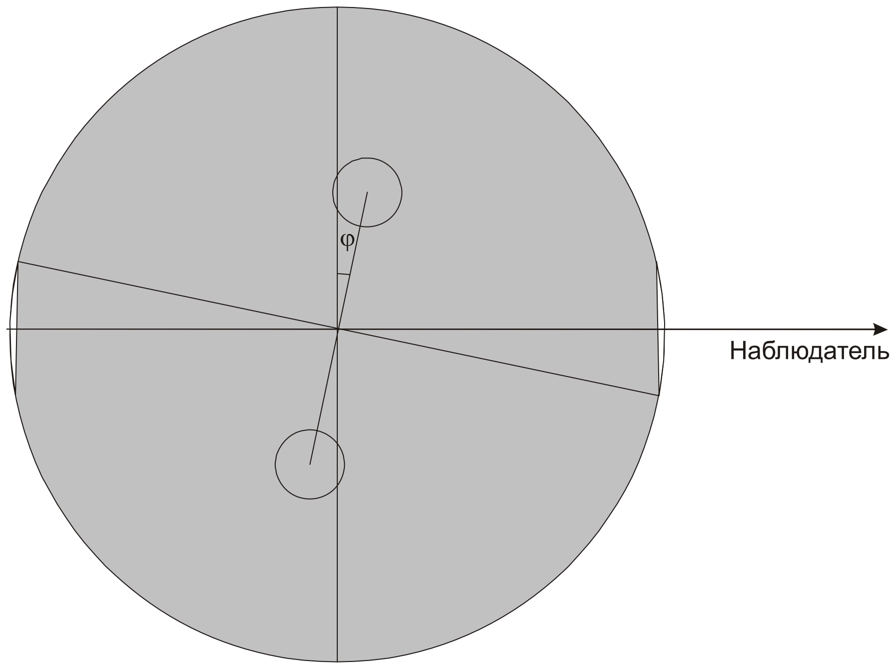
Здесь μ – масса Солнца. Относительная скорость звезд будет еще вдвое больше (42 км/с). Если луч зрения лежит в плоскости орбит, то эта скорость будет приводить к раздвоению спектральных линий на величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v}{c} = 1.4 \cdot 10^{-4}.$$

Этого вполне достаточно, чтобы зафиксировать эффект спектрографом с разрешением S=10^5. Однако, в общем случае ситуация также зависит от расположения орбиты в пространстве. Если ось направлена к наблюдателю, то лучевых скоростей у звезд системы не будет вовсе. Но таких систем немного. Оси достаточно быть наклоненной к направлению к наблюдателю на угол

$$\varphi = \arcsin \frac{\lambda}{S\Delta\lambda} = 4^{\circ},$$

и у звезд системы появится лучевая скорость, достаточная для обнаружения. В итоге, область благоприятного расположения оси занимает практически всю сферу, что упрощает оценку числа систем:



Для определения числа спектрально двойных систем мы вычисляем расстояние, с которого они будут доступны спектрографу с предельной величиной m=12:

$$\lg r_S = 1 + \frac{m - M}{5}; \quad r_S = 400 \text{ пк.}$$

Число зафиксированных спектральных двойных будет равно

$$N_S = \frac{4}{3}\pi \cdot r_S^3 n \approx 2.7 \cdot 10^5.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Задание разбивается на три независимые части, связанные с оценкой наблюдаемых двойных систем разных типов. Наиболее простым является вычисление количества оптических двойных систем, которое оценивается в 2 балла. Они выставляются только при условии точных вычислений и правильного ответа. Если при его формулировке отдельно не оговаривается, что предельная звездная величина астрографа достаточна для фиксации этих двойных, оценка уменьшается до 1 балла.

Вычисление количества затменных переменных оценивается в 3 балла. Если в ходе решения участники олимпиады не учитывают геометрический фактор, и считают, что затменными будут все системы внутри сферы с найденным радиусом, весь этап решения не засчитывается (0 баллов). При оценке угла γ участники олимпиады могут учитывать величину необходимой фазы затмения, строго говоря, отличной от нуля. При правильных вычислениях это не скажется на ответе, и оценка также составляет 3 балла, однако, в случае ошибок она снижается до 2 баллов. Если участник олимпиады правильно вычисляет угол γ, но неверно переводит его в вероятность обнаружения затменной системы, оценка за этап уменьшается до 1 балла. При неверном задании абсолютной звездной величины всей системы (4.7^m вместо 4.0^m) оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Третий этап решения, связанный со спектральными двойными, также оценивается в 3 балла. Если при этом не оговаривается геометрическая ситуация и не вычисляется угол φ или не указывается его незначительность, оценка даже при правильном ответе уменьшается до 1 балла. Если участник вычисляет долю звезд, у которых лучевую скорость нельзя обнаружить, то это не сказывается на ответе и оценивается также 3 баллами при условии отсутствия ошибок в вычислениях. При неверном задании абсолютной звездной величины всей системы (4.7^m вместо 4.0^m) оценка за этап уменьшается на 1 балл.