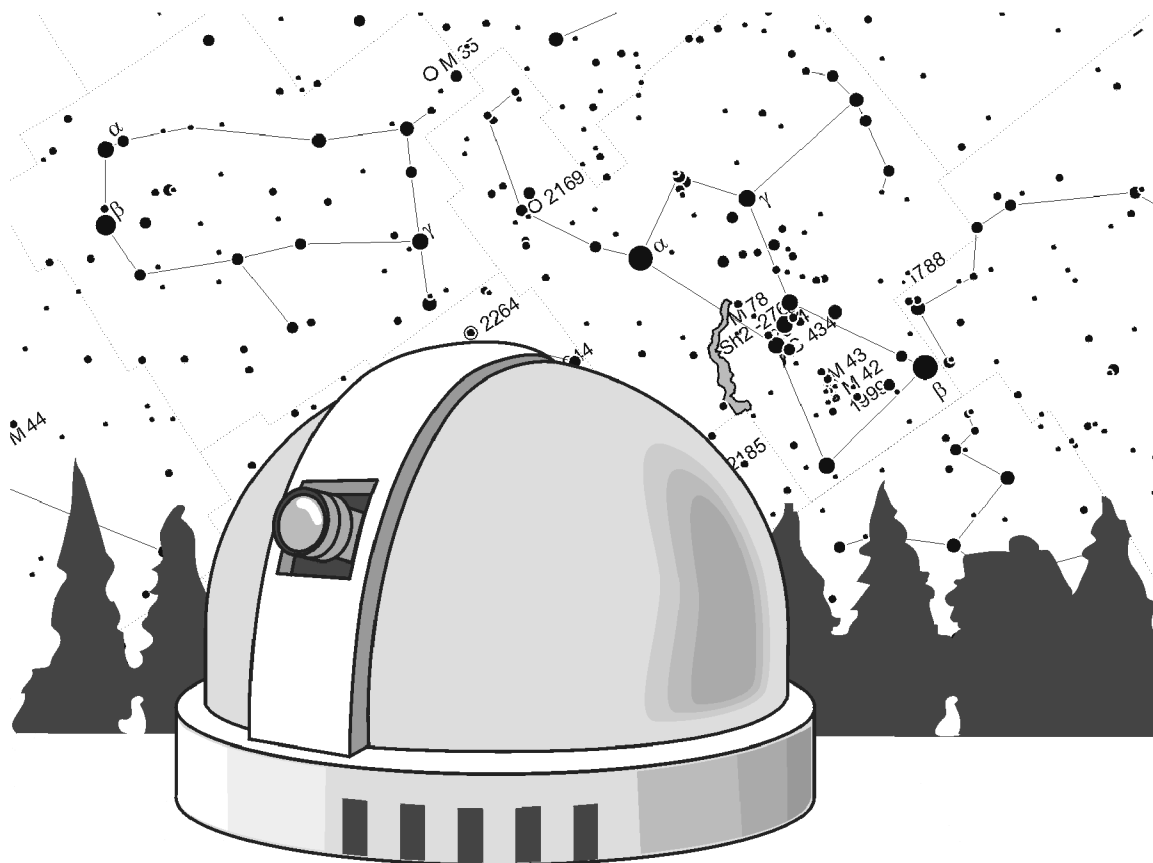


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Академия повышения квалификации и профессиональной
переподготовки работников образования
Астрономическое общество



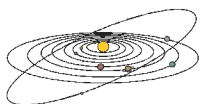
ХIII Всероссийская Олимпиада школьников по астрономии

Условия и решения задач

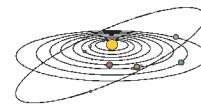
Саранск, 2006 г.

ХІІІ Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Саранск, 17-22 апреля 2006 года. Условия и решения задач теоретического и практического туров. Сборник под редакцией А.В. Засова, А.С. Расторгуева, А.М. Татарникова, О.С. Угольников. 2006. 28 стр.

Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.



ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР



Видимость звезд (А.К. Муртазов)

Класс: **9**

Задача: **1**

? Можно ли в Саранске (широта $+54^\circ$) одновременно наблюдать Капеллу и Антарес? А Сириус и Вега? Склонения Капеллы, Антареса, Сириуса и Веги равны соответственно $+46^\circ$, -26° , -17° и $+39^\circ$.

! Склонения Антареса и Сириуса отрицательные, однако, они превышают -36° , поэтому обе звезды восходят над горизонтом в Саранске (Антарес можно наблюдать по ночам весной и в начале лета, Сириус – осенью, зимой и в начале весны). Склонения Капеллы и Веги больше $+36^\circ$, и эти две звезды постоянно находятся над горизонтом. Как только над горизонтом появляется Антарес, его можно наблюдать одновременно с Капеллой, а с появлением на небе Сириуса он будет виден вместе с Вегой.



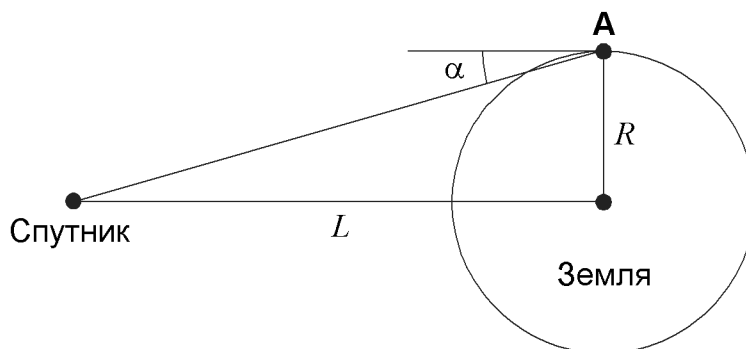
Искусственный спутник Земли (О.С. Угольников)

Класс: **9**

Задача: **2**

? Искусственный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите. В каждый момент времени спутник можно видеть ровно с половины поверхности Земли. Найдите период обращения спутника. Атмосферная рефракция у горизонта составляет $35'$, атмосферное поглощение не учитывать.

! Если бы у нашей планеты не было атмосферы, то при любом радиусе орбиты спутник был бы виден с меньшей части поверхности Земли из-за своего суточного параллакса (см. рисунок).



ХIII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Возьмем некоторую точку **A**, направление на которую из центра Земли перпендикулярно направлению на спутник. В этой точке спутник виден не будет, находясь ниже горизонта на угол:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{L},$$

где R – радиус Земли, а L – радиус орбиты спутника. Однако у Земли есть атмосфера, создающая явление рефракции, поднимающей светила у горизонта на $35'$. Если эта величина совпадет с суточным параллаксом α , условие задачи будет выполнено. Из этого условия получаем радиус орбиты спутника:

$$L = R \operatorname{ctg} 35' = 625 \text{ тыс. км.}$$

По III закону Кеплера получаем, что период обращения спутника вокруг Земли составляет около 57.3 суток.



Морское путешествие (О.С. Угольников)

Класс: **9**

Задача: **3**

? Мореплаватель, странствующий по океану вдоль экватора с постоянной скоростью, использовал часы с будильником, идущие по Гринвичскому времени, и через несколько дней обнаружил, что точно в момент пробуждения по звонку будильника на темном небе каждый раз восходила одна и та же звезда. В каком направлении и с какой скоростью двигался путешественник?

! Как известно, звездные сутки короче средних солнечных, их продолжительность составляет около 23 часов и 56 минут. За одни солнечные сутки (период времени между звонками будильника) Земля совершает 1.00274 оборота вокруг своей оси (или 1 оборот и еще 0.986°) относительно звезд, вращаясь с запада на восток. Скорости движения мореплавателя недостаточно для того, чтобы сделать за сутки один или несколько оборотов вокруг Земли, но он вполне может компенсировать эти 0.986° , сместившись на подобную величину на запад по долготе. Тогда по прошествии солнечных суток он окажется в том же положении относительно звезд и вновь увидит восход той же звезды по звонку будильника. Окружность Земли по экватору составляет 40074 км, и угол 0.986° соответствует расстоянию 109.8 км. Чтобы преодолеть это расстояние за 24 часа, нужно двигаться со скоростью около 4.6 км/ч. Мы видим, что мореплаватель особенно не торопился.

Теоретический тур



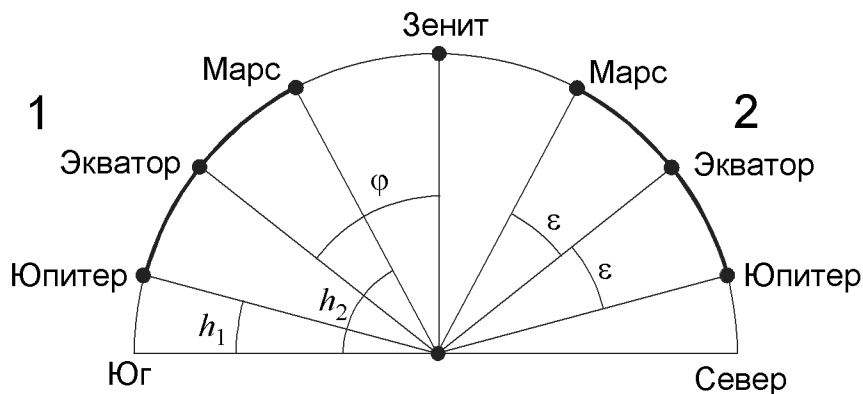
Кульминации планет (О.С. Угольников)

Класс: **9**

Задача: **4**

? Любители астрономии наблюдали планеты и обнаружили, что Юпитер кульминировал в 6 часов вечера по местному времени на высоте 15° , а Марс – в 6 часов утра по местному времени на высоте 62° . В какой сезон года и на какой широте проводились наблюдения?

! Планеты находятся на небе вблизи эклиптики, наклоненной к небесному экватору на угол ε , равный примерно 23.5° . Интервал, в котором может изменяться склонение (а значит, и высота в верхней кульминации в фиксированном пункте Земли) точек эклиптики, составляет 2ε или 47° . Но именно настолько отличаются высоты Марса и Юпитера в верхней кульминации (вариант нижней кульминации не даст решения задачи). Это означает, что планеты находились вблизи двух противоположных точек солнцестояний, а их верхние кульминации происходили с одной стороны от зенита – либо обе на севере, либо обе на юге (см. рисунок).



Если предположить, что кульминация Марса и Юпитера происходила на юге, то дело происходило в северном полушарии Земли, при этом Юпитер находился вблизи точки зимнего солнцестояния, а Марс – около точки летнего солнцестояния. Так как эти планеты кульминировали соответственно около 18 и 6 часов по местному времени, можно сделать вывод, что наблюдения проводились вблизи дня осеннего равноденствия, 23 сентября. Широта точки наблюдения φ вычисляется из высот кульминаций Марса и Юпитера h_1 и h_2 :

$$\varphi = 90^\circ - \frac{h_1 + h_2}{2} = 51.5^\circ.$$

Для второго случая (кульминации планет на севере) с помощью аналогичных рассуждений мы можем получить, что наблюдения проводились около 21 марта на широте -51.5° .



Искусственный спутник Луны (О.С. Угольников)

Класс: **9**

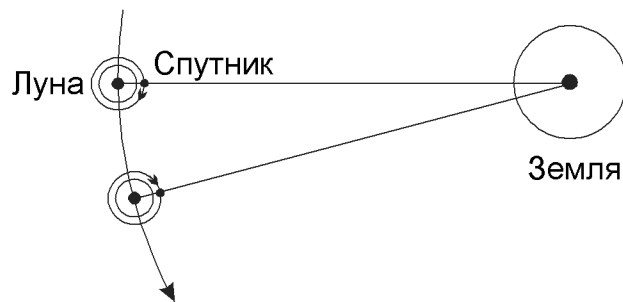
Задача: **5**

? Определите минимальный синодический период искусственного спутника Луны (промежуток между двумя последовательными пролетами спутника перед центром лунного диска при наблюдении с Земли).

! Вначале определим минимальный период обращения искусственного спутника Луны. Очевидно, это будет период обращения по круговой орбите с радиусом, равным радиусу Луны:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 6.5 \cdot 10^3 \text{ с}$$

или 1.8 часа. Минимальный синодический период S для наблюдателя на Земле (как и на Луне, повернутой к Земле одной стороной) будет достигнут в том случае, если спутник движется вокруг Луны в направлении, противоположном орбитальному (и осевому) вращению Луны (см. рисунок).



Обозначив период обращения Луны через T_0 (он равен 27.32 суток), мы можем записать соотношение:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_0},$$

из которого мы получаем величину синодического периода: 1.795 часа.



Запаздывающий радиисточник (А.С. Расторгуев)

Класс: **9**

Задача: **6**

? Радиоастроном заметил, что периодический сигнал от источника, за которым он регулярно следит, 1 апреля и 1 октября приходит на $8^{\text{h}}20^{\text{m}}$ позже, чем 1 июля. В каком созвездии находится радиисточник периодического сигнала?

! 8 минут и 20 секунд — это тот промежуток времени, за который свет проходит расстояние от Солнца до Земли. Следовательно, 1 июля источник располагается ровно на 1 а.е. ближе к Земле, чем 1 апреля и 1 октября. Это может быть только в том случае, если источник находится в плоскости эклиптики и 1 июля оказывается в противостоянии с Солнцем. Значит, он находится в созвездии Стрельца.



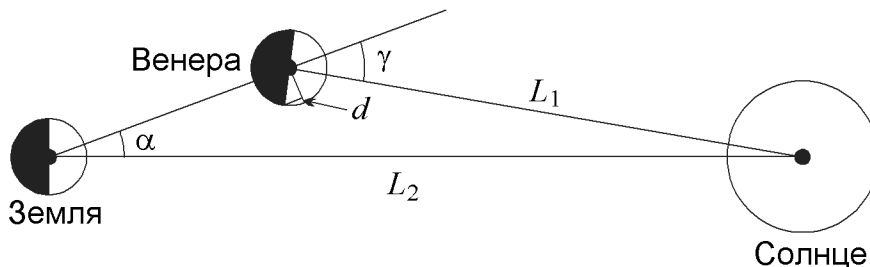
Нижнее соединение Венеры (О.С. Угольников)

Класс: **10**

Задача: **1**

? 14 января 2006 года планета Венера прошла точку нижнего соединения с Солнцем, располагаясь на небе в 5.5° к северу от него, что позволило ей остаться видимой в северном полушарии Земли на фоне вечерней и утренней зари. Найдите видимую толщину серпика Венеры в это время (в угловых секундах). Удалось бы различить эту толщину в телескоп, или серпик показался бы совершенно тонким?

! Для ответа на задачу нам нужно определить величину фазы Венеры. Она определяется углом с вершиной в центре Венеры, образованном направлениями на Солнце и Землю. Смежный к нему угол обозначен на рисунке буквой γ .



Угол γ может быть найден из треугольника Солнце-Венера-Земля по теореме синусов:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{L_2}{L_1} \sin \alpha\right) = 7.6^\circ$$

Здесь L_1 и L_2 — радиусы орбит Венеры и Земли, α — угловое расстояние Венеры от Солнца. Линейная фаза Венеры есть отношение толщины серпика к его диаметру или отношение маленького отрезка d на рисунке к диаметру Венеры. Фаза Венеры составит

$$F = \frac{r - r \cos \gamma}{2r} = \frac{1 - \cos \gamma}{2} = 4.4 \cdot 10^{-3}.$$

Здесь r — радиус Венеры. Учитывая, что видимый диаметр Венеры в момент нижнего соединения составляет примерно $60''$ (в этом можно легко убедиться, зная радиус Венеры), получаем, что видимая толщина серпика Венеры составляет менее $0.3''$. Это меньше, чем предел разрешения любого телескопа на поверхности Земли, поэтому серпик Венеры должен показаться совершенно тонким, но при этом размытым атмосферным дрожанием.

На самом деле серпик Венеры даже в это время все же будет иметь ощутимую толщину. Все дело в атмосфере Венеры, благодаря которой солнечное излучение заходит в заднее по отношению к дневному светилу полушарие планеты. Благодаря этому мы также замечаем эффект удлинения рогов серпа планеты вблизи нижнего соединения, а Венера, несмотря на столь малую фазу, остается достаточно яркой и может быть найдена на фоне зари.



Вспышки на Луне (А.К. Муртазов)

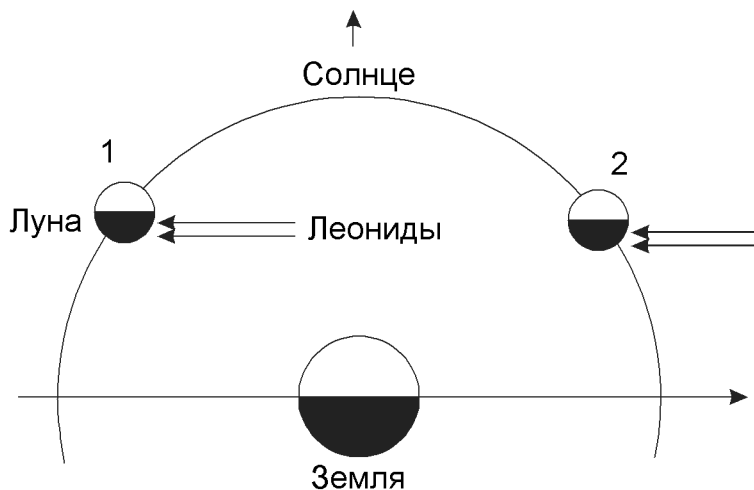
Класс: **10 11**

Задача: **2**

? Как известно, в настоящее время проводятся наблюдения вспышек на темной стороне Луны, возникающих при ударе метеоритов об ее поверхность. В какую фазу Луны удастся увидеть больше таких вспышек во время действия Леонид, активных в середине ноября?

! Название метеорного потока Леониды указывает на то, что его радиант находится в зодиакальном созвездии Льва. В середине ноября созвездие Льва находится в 90° к западу от Солнца вдоль эклиптики, и Земля движется по орбите как раз в направлении этого созвездия, навстречу метеорным телам потока Леониды.

На рисунке показаны положения Земли, Луны (в различных фазах) и направления движения метеоров при наблюдении со стороны северного полюса эклиптики. Земля и Луна обращаются вокруг своей оси в одну сторону, и Леониды падают на утренние полусферы обоих тел. В растущей серповидной фазе Луны



(положение 1 на рисунке) вся ее неосвещенная часть, подверженная ударам Леонид, повернута к Земле и хорошо наблюдается. В убывающей фазе (положение 2) значительная часть метеоритов попадает на невидимое с Земли полушарие Луны. В итоге мы получаем, что подобные наблюдения дадут больший результат вечером при растущей Луне, в то время как сами Леониды наблюдаются на Земле под утро.



Холодный Плутон (А.В. Засов)

Класс: **10 11**

Задача: **3**

? Эксцентриситет орбиты Плутона равен 0.25. Когда он проходил точку перигелия, его блеск на земном небе в противостоянии составил 13.6^m , а температура освещенной части поверхности была равна -220°C . Чему будут равны эти величины, когда Плутон окажется в афелии своей орбиты? Считать отражательную способность планеты неизменной, уходом тепла на неосвещенную часть планеты пренебречь.

Теоретический тур

! Определим, во сколько раз дальше от Солнца Плутон располагается в точке афелия, нежели в точке перигелия своей орбиты, и обозначим это число через A :

$$A = \frac{1+e}{1-e} = \frac{5}{3}.$$

Температура освещенной поверхности Плутона в перигелии T_1 составляет -220°C или 53 К. Находясь в афелии, Плутон будет получать в A^2 или $25/9$ раз меньше солнечной энергии, во столько же раз меньше энергии он будет излучать обратно в пространство. Считая Плутон абсолютно черным телом, для которого излучающая способность пропорциональна четвертой степени температуры, получаем значение температуры освещенной поверхности Плутона в афелии:

$$T_2 = \frac{T_1}{\sqrt[4]{A^2}} = 41 \text{ К}$$

или -232°C . При вычислении звездной величины Плутона учтем, что он располагается в A раз дальше от Солнца, но при этом и Земля, с которой ведутся наблюдения, находится примерно в такое же количество раз дальше от Плутона (разницей в 1 а.е. в противостоянии вполне можно пренебречь). Таким образом, количество света, получаемого на Земле от Плутона, уменьшится в A^4 раз, и звездная величина составит:

$$m_2 = m_1 + 2.5 \lg A^4 = m_1 + 10 \lg A = 15.8.$$



Атмосферное давление (А.В. Засов)

Класс: **10**

Задача: **4**

? Атмосферное давление на поверхности Марса составляет 750 Па или 0.75% от давления на поверхности Земли. Если на Земле давление падает в 10 раз на каждые 15 км подъема, а на Марсе — на каждые 35 км, то как отличаются давления на высоте 10 км над поверхностями этих планет?

! Базируясь на данных условия задачи, мы можем записать зависимости атмосферного давления от высоты h над поверхностью для Земли и Марса:

$$p_1 = p_{10} \cdot 10^{-h/h_1}, \quad p_2 = p_{20} \cdot 10^{-h/h_2}.$$

Здесь p_{10} и p_{20} — приземные значения атмосферного давления на Земле и Марсе, равные соответственно 10^5 Па и 750 Па, h_1 и h_2 — высоты, на которых давление уменьшается в 10 раз, равные 15 км и 35 км. Подставляя значение h , равное 10 км, получаем величины атмосферного давления на этой высоте: $2.15 \cdot 10^4$ Па и 388 Па для Земли и Марса соответственно. Атмосферное давление на высоте 10 км над поверхностью Марса составляет около 1.8% от аналогичной величины на Земле.



Старт с астероида (А.В. Засов)

Класс: **10**

Задача: **5**

? Астероид имеет ту же плотность, что и Земля, а его радиус меньше земного в 100 раз. Сколько потребуется топлива, выбрасываемого из сопла ракеты со скоростью 3 км/с, чтобы космический аппарат массой 1000 кг (без учета топлива) смог покинуть астероид?

! Для того, чтобы покинуть астероид, космический аппарат должен развить вторую космическую скорость, равную

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} \cdot R.$$

Так как плотность астероида совпадает с земной, а радиус меньше земного в 100 раз, мы можем сразу получить, что вторая космическая скорость для астероида составляет 1/100 от аналогичной величины для Земли и равна 112 м/с. Обозначим массу корабля через M , искомую массу топлива через m , а скорость выброса топлива через u . До старта корабль с топливом покоился, поэтому по закону сохранения импульса имеем:

$$Mv = mu, \quad m = M \frac{v}{u}.$$

Подставляя численные данные, получаем, что для взлета с астероида потребуется 37.3 кг топлива.



Тесная двойная система (О.С. Угольников)

Класс: **10**

Задача: **6**

? Тесная двойная система состоит из двух одинаковых компонент, похожих на Солнце. Планета обращается вокруг центра масс этой пары по орбите, близкой к круговой. Плоскость орбиты планеты перпендикулярна плоскости орбит звезд, а температурные условия на этой планете практически неотличимы от земных. Найдите продолжительность года на планете.

! Так как плоскость орбиты планеты перпендикулярна плоскости орбит звезд, взаимные затмения звезд хотя и наблюдаются на этой планете, но носят эпизодический характер и не влияют на температурный режим. Мы можем считать, что планета постоянно получает тепло от обеих звезд, каждая из которых излучает как Солнце. Чтобы получать от них столько же энергии, сколько получает Земля от одного Солнца, планета должна располагаться на расстоянии $\sqrt{2}$ или 1.41 а.е. от центра масс тесной двойной системы.

Теоретический тур

Для определения периода обращения планеты воспользуемся обобщенным III законом Кеплера, который запишем в следующем виде:

$$\frac{a^3}{T^2 M} = 1.$$

Здесь a — радиус орбиты в астрономических единицах, T — период обращения в годах, M — суммарная масса системы в массах Солнца. Учитывая то, что $a=1.41$ и $M=2$, получаем, что период обращения планеты составляет 1.19 лет.



Полутеневое затмение (О.С. Угольников)

Класс:

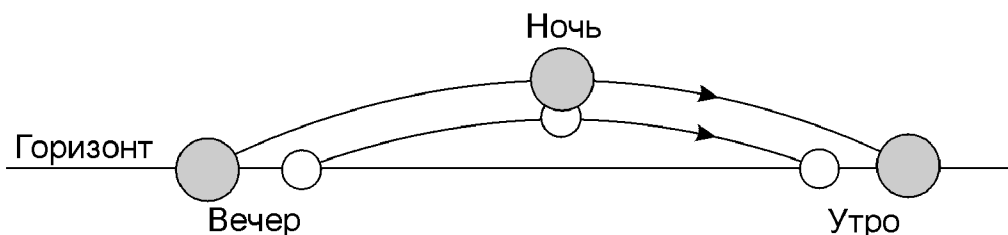
11

Задача:

1

? Наблюдатель, находящийся в средней полосе России, заметил, что вечером Луна вошла одновременно с заходом Солнца, а утром она зашла одновременно с восходом дневного светила. В середине ночи произошло полутеневое лунное затмение. Какой край диска Луны глубже всего погрузился в земную полутень?

! Наш естественный спутник, Луна, достаточно быстро движется по орбите вокруг Земли с запада на восток, навстречу суточному движению неба. Поэтому видимое перемещение Луны по небу происходит с несколько меньшей скоростью, чем движение других объектов, в том числе земной тени и полутени. Восходя вечером за несколько часов до затмения, Луна находилась западнее полутени, однако не вошла раньше нее. Следовательно, раз дело происходило в северном полушарии, Луна имела меньшее склонение, нежели центр полутени. Аналогично, утром, после затмения, Луна находилась восточнее полутени, но зашла вместе с ней, значит ее склонение было также меньше.



В этом же можно убедиться из рисунка. Земная полутень и Луна находились на небе одинаковое количество времени, но видимая угловая скорость Луны меньше, чем у полутени. Следовательно, длина ее видимого пути от восхода до захода меньше, и Луна находилась южнее полутени. А это в свою очередь означает, что во время затмения в середине ночи Луна глубже всего погрузилась в полутень своим северным краем.

Ситуация, очень близкая к описанной в условии задачи, имела место в центральных районах России во время частного полутеневого лунного затмения в ночь с 24 на 25 июня 2002 года.



Горение водорода (А.В. Засов)

Класс: **11**

Задача: **4**

? Звезда с массой 4 массы Солнца и с таким же химическим составом имеет абсолютную звездную величину на 5^m меньше, чем Солнце, и находится на главной последовательности. Какова продолжительность жизни этой звезды на главной последовательности, если она сходит с нее после того, как около 10% водорода, входящего в ее состав, превратится в гелий? Учтите, что одно ядро гелия имеет массу, на $4.7 \cdot 10^{-29}$ кг меньшую, чем четыре ядра водорода. Массу протонов и нейтронов считать одинаковой и равной $1.6 \cdot 10^{-27}$ кг.

! Определим эффективность ядерных реакций превращения водорода в гелий, то есть количество энергии в расчете на одно израсходованное ядро водорода (протон). Обозначим массу протона и нейтрона через m , а "дефект массы" — разницу масс четырех протонов и ядра гелия — через Δm . Энерговыведение на один протон будет равно

$$E_1 = \frac{\Delta m c^2}{4} = 1.06 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

По условию задачи, масса звезды составляет 4 массы Солнца или $8 \cdot 10^{30}$ кг. Водород составляет 70% массы этой звезды, и 10% этого водорода превратится в гелий. В итоге, полная масса сгорающего водорода M составляет 7% массы звезды или $5.6 \cdot 10^{29}$ кг. Общее количество энергии, которое при этом выделится, составляет

$$E_0 = E_1 \frac{M}{m} = 3.6 \cdot 10^{44} \text{ Дж.}$$

Светимость звезды L , как видно по абсолютной звездной величине, составляет 100 светимостей Солнца или $3.88 \cdot 10^{28}$ Вт. Время жизни звезды на главной последовательности равно

$$T = \frac{E_0}{L} = 9.3 \cdot 10^{15} \text{ с}$$

или около 300 миллионов лет.



Затменная переменная звезда (О.С. Угольников)

Класс: **11**

Задача: **5**

? Затменная переменная звезда каждые 30 дней уменьшает свой блеск на 0.2^m , при этом все ее минимумы совершенно одинаковы. Спектральные наблюдения показали, что линия $H\alpha$ (лабораторная длина волны 6563 Å) раздвоена, ее компоненты периодически расходятся на 2 Å. Считая затмения центральными, а средние плотности звезд — одинаковыми, определите их массы. Потемнением дисков звезд к краю пренебrecь.

! Одинаковый вид главного и вторичного минимумов затменной переменной звезды означает одинаковую поверхностную яркость обеих компонент, входящих в систему. А это, в свою очередь, говорит о равенстве их эффективных температур. По условию задачи затмения центральные, а потемнение дисков звезд к краю отсутствует. Обозначим радиус большей звезды через R , радиус меньшей звезды через r . Тогда величина обоих минимумов составляет

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{\pi R^2}{\pi R^2 + \pi r^2} = 2.5 \lg \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Отсюда мы находим соотношение радиусов звезд:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{10^{0.4\Delta m} - 1} = 0.45.$$

По условию задачи, средние плотности звезд одинаковы, поэтому мы можем определить и соотношение их масс:

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{r}{R} \right)^3 = 0.091 = \frac{1}{11}$$

Минимумы затменной переменной одинаковы не только по глубине, но и по продолжительности. Кроме этого, они происходят через одинаковые промежутки времени. Следовательно, орбиты звезд в этой системе круговые, а период обращения T есть удвоенный промежуток времени между минимумами, то есть 60 дней. Раз затмения центральные, то плоскость орбит звезд проходит через Землю. Это дает нам возможность определить по спектральным наблюдениям в линии $H\alpha$ относительную скорость звезд:

$$v = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 91.4 \text{ км/с.}$$

Здесь $\Delta \lambda$ — максимальное расстояние между компонентами спектральной линии, а λ — ее длина волны. Полученные значения позволяют определить расстояние между звездами:

$$a = \frac{vT}{2\pi},$$

ХIII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

что составляет 75 млн км или 0.5 а.е. Выражая период обращения T в годах (0.164 года), мы получаем величину суммарной массы звезд в массах Солнца:

$$M + m = \frac{a^3}{T^2} = 4.6.$$

Учитывая полученное ранее соотношение масс, получаем значения масс звезд: 4.2 и 0.4 массы Солнца.



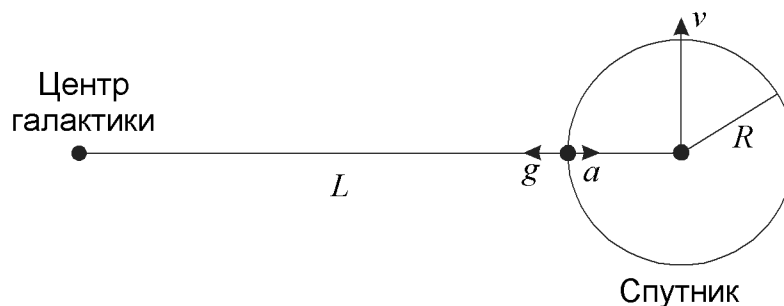
Спутник галактики (А.С. Расторгуев)

Класс: **11**

Задача: **6**

? Каким может быть максимальный размер спутника гигантской галактики, движущегося по круговой орбите радиусом 30 кпк, если галактика обладает "плоской" кривой вращения, то есть линейная скорость движения по круговой орбите не зависит от радиуса орбиты и составляет 250 км/с? Спутник имеет массу, равную 10^9 солнечных масс, и сохраняет сферическую симметрию.

! Устойчивость шарообразной галактики-спутника зависит от того, достаточно ли его притяжения для удержания всех частей шара, или они могут перейти на самостоятельные орбиты вокруг центра главной галактики. Последнее может произойти, если какая-либо точка внутри (или хотя бы на поверхности) шара окажется в так называемой внутренней точке Лагранжа системы "галактика-спутник". Эта точка находится на отрезке, соединяющей центры галактики и спутника, и ее положение определяется тем, что материальное тело в этой точке будет обращаться вокруг центра главной галактики с той же угловой скоростью ω , что и галактика-спутник, оставаясь на линии, соединяющей центры галактик. При дальнейшем удалении от спутника тело перейдет на самостоятельную орбиту вокруг центра главной галактики. Таким образом, максимальный радиус спутника R есть расстояние от центра спутника до внутренней точки Лагранжа. Найдем это расстояние.



Полная масса галактики и распределение массы внутри нее неизвестны, однако мы знаем величину круговой орбитальной скорости v на любом расстоянии от центра галактики, а значит, знаем и величину ускорения силы тяжести. Угловая скорость движения спутника равна

Теоретический тур

$$\omega = \frac{v}{L},$$

где L – расстояние от центра галактики до центра спутника. На край спутника, находящийся ближе всего к центру галактики, действуют силы притяжения от галактики и от самого спутника. Ускорения этих сил направлены в противоположные стороны и равны

$$g = \frac{v^2}{L - R}, \quad a = \frac{GM}{R^2}.$$

Здесь M – масса спутника. Данная точка, как и весь спутник, движется относительно центра галактики с угловой скоростью ω . Отсюда мы получаем:

$$\omega^2(L - R) = \frac{v^2(L - R)}{L^2} = \frac{v^2}{L - R} - \frac{GM}{R^2}.$$

Предположим, что размер спутника существенно меньше его расстояния до центра галактики. В этом случае данное равенство можно упростить:

$$\frac{v^2}{L} - \frac{v^2 R}{L^2} = \frac{v^2}{L} \left(1 + \frac{R}{L}\right) - \frac{GM}{R^2}.$$

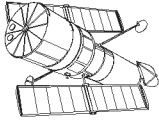
Из этого равенства следует:

$$\frac{2v^2 R}{L^2} = \frac{GM}{R^2},$$

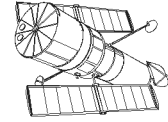
из чего получаем верхнюю оценку для радиуса спутника:

$$R = \left(\frac{GM L^2}{2v^2} \right)^{1/3}.$$

Подставляя численные значения, получаем 10^{20} м или 3.3 кпк. Мы видим, что сделанное нами предположение, что данный радиус существенно меньше расстояния до центра галактики, оправдывается и допустимо для требуемой оценки. Максимальный диаметр спутника составляет 6.6 кпк.



ПРАКТИЧЕСКИЙ ТУР



Странная Луна (О.С. Угольников)

Класс:

9

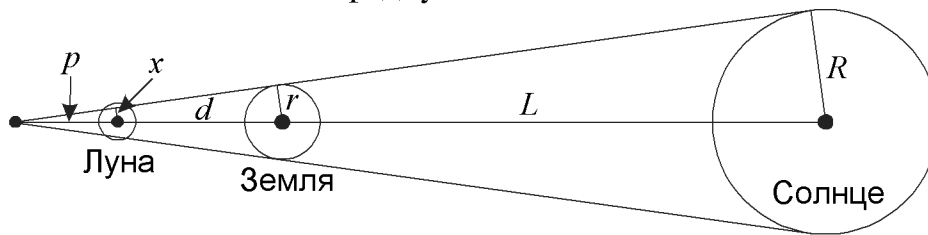
Задача:

1

? На рекламном плакате появилось следующее изображение серпа Луны (негатив). На каком расстоянии от Земли должна была бы находиться Луна, чтобы такая картина была возможной?



! Если говорить об обычных фазах Луны, то подобный вид наш спутник не имел бы ни на каком расстоянии от Земли, так как линия раздела темной и светлой частей диска Луны (ее называют терминатором) — это дуга эллипса, проходящая через две диаметрально противоположные точки диска Луны (близкие к полюсам). Однако, подобный вид Луна могла бы иметь во время затмения, если бы вдруг размеры земной тени стали меньше размеров Луны. На рисунке мы видим, что радиус земной тени составляет примерно 0.85 от радиуса Луны, то есть 1480 км. Определим, на каком расстоянии от Земли тень нашей планеты имеет такой радиус.



На рисунке показаны положения Солнца, Земли и Луны во время подобного гипотетического затмения. Из подобия трех треугольников имеем

$$\frac{x}{p} = \frac{r}{p+d} = \frac{R}{p+d+L}.$$

Здесь R и r — радиусы Солнца и Земли, x — радиус земной тени на расстоянии Луны, L — расстояние от Земли до Луны, d — искомое расстояние от Земли до Луны, p — расстояние от Луны до вершины тени. Из этих соотношений можно найти неизвестные нам p и d , нас интересует только вторая из этих величин:

$$d = \frac{L(r-x)}{R-r} = 1.06 \text{ млн км.}$$



Тройная система (А.М. Татарников)

Класс: **9 10**

Задача: **2**

? В небольшой телескоп (диаметр объектива 60 мм, фокусное расстояние 240 мм) наблюдают слабую визуально тройную систему, состоящую из звезд 9.5 звездной величины, вытянувшихся вдоль одной прямой. Угловое расстояние между первой и второй звездой равно 50", между второй и третьей звездой — 8". Опишите картину, которую видит наблюдатель в окуляры с фокусным расстоянием 10, 20, 40 мм. Известно, что наблюдатель видел невооруженным глазом звезды до 5 звездной величины, диаметр зрачка глаза 5 мм, разрешающая способность глаза 2'. Яркостью фона неба пренебречь.

! Вначале определим диаметр пучка света, выходящего из окуляра:

$$d = D \cdot \frac{f}{F},$$

где D — диаметр объектива телескопа, F и f — фокусные расстояния объектива и окуляра. Подставляя численные данные, мы получаем для самого длиннофокусного из окуляров (40 мм) значение диаметра выходящего пучка 10 мм, что вдвое больше диаметра зрачка человеческого глаза. Это означает, что значительная часть света, собранная объективом, не будет попадать в глаз наблюдателя, и такая оптическая схема будет работать как телескоп с увеличением 6 раз и диаметром объектива D_1 , равным только 30 мм. Предельное угловое разрешение такой системы будет равно (1/6) от 2 угловых минут, то есть 20", а предельная звездная величина составляет

$$m_3 = m_0 + 5 \lg \frac{D_1}{d_0},$$

где m_0 — предельная звездная величина для невооруженного глаза, d_0 — диаметр зрачка. В итоге, мы получаем, что в данный телескоп с 40-мм окуляром будут видны звезды только до 8.9^m. Вторая и третья звезда, находящиеся в 8" друг от друга, будут видны как одна звезда 8.7^m, а первая звезда видна вообще не будет.

Для окуляров с фокусными расстояниями 10 и 20 мм диаметр выходного пучка света составит соответственно 2.5 и 5 мм, что не превышает диаметр зрачка глаза. Это означает, что в глаз попадет весь свет звезд, собранный объективом, и предельная звездная величина будет равна

$$m_{1,2} = m_0 + 5 \lg \frac{D}{d_0} = 10.4,$$

что достаточно для наблюдений звезд по отдельности. Предельное угловое разрешение для этих окуляров составит соответственно 5" и 10". Итак, в 10-мм окуляр будут видны все три звезды по отдельности, в 20-мм окуляр — первая звезда отдельно и вторая и третья звезды как одно более яркое светило. В 40-мм окуляр, как уже было сказано, будут видны только слившиеся вторая и третья звезды.



Спутник в небе Земли (А.М. Татарников)

Класс: **9**

Задача: **3**

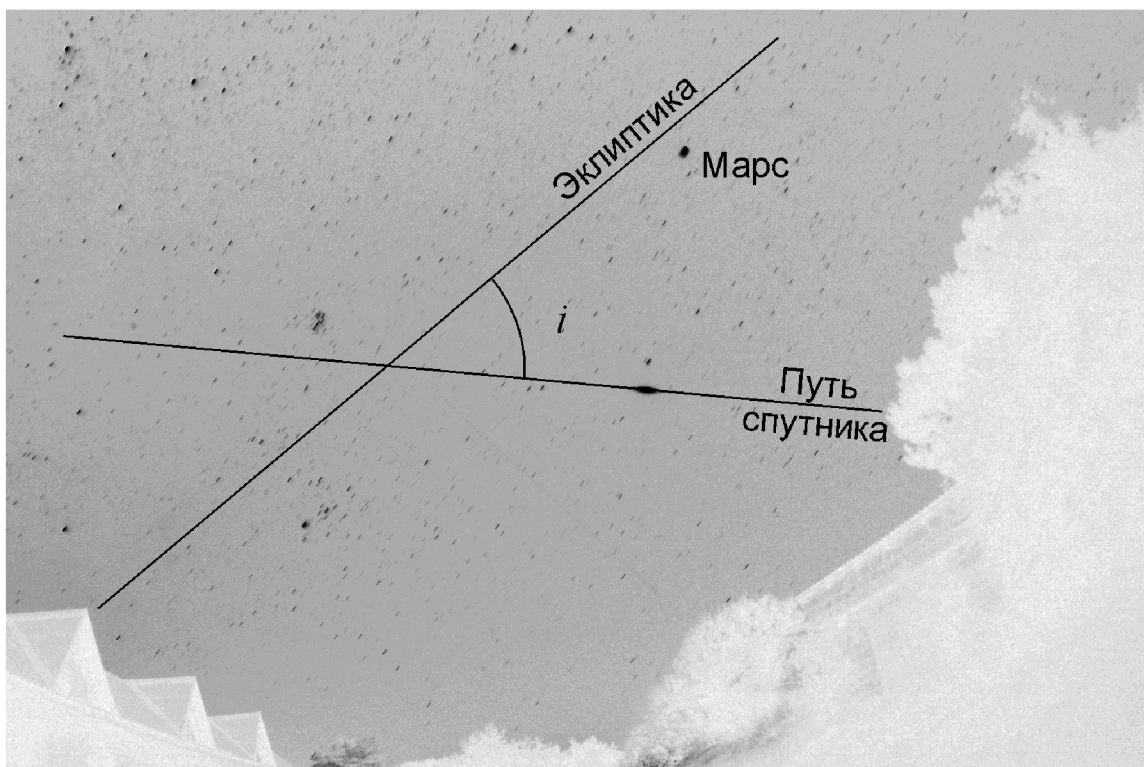
? Вам выдана негативная фотография звездного неба, полученная в августе 2005 года в Крыму. На ней виден след искусственного спутника Земли, у которого в период съемки наблюдалась вспышка блеска. Оцените угол наклона орбиты спутника к плоскости орбиты Земли на момент съемки. Параллактическое смещение спутника не учитывать.



! Так как мы пренебрегаем параллактическим смещением спутника, угол наклона его орбиты к плоскости орбиты Земли есть угол между его видимой траекторией и эклиптической. Снимок содержит зодиакальные созвездия Овна и Тельца, построение эклиптики существенно облегчает яркий Марс, видимый на снимке и находившийся в августе 2005 года в созвездии Овна достаточно близко к эклиптике.

Построив видимый путь спутника и эклиптику на данном снимке, мы получаем значение угла i между ними: около 45° .

Практический тур



★ Звезда Лейтена (Е.Н. Фадеев)

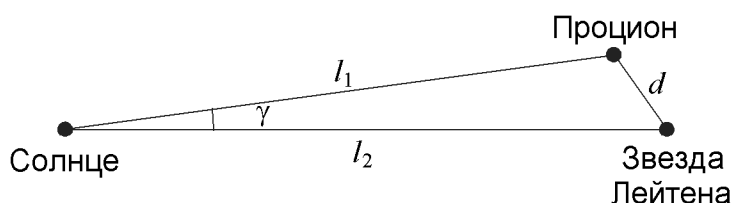
Класс: **10 11** Задача: **1**

? Предположим, космический корабль долетел до окрестностей звезды Лейтена. Какую видимую звездную величину будет иметь Процион? С каким объектом земного неба его можно будет сравнить? Можно ли увидеть невооруженным глазом звезду Лейтена из окрестностей Проциона?

При набл. с Земли:	Процион	Звезда Лейтена
Прямое восхождение	7 ^h 39 ^m 18 ^s	7 ^h 27 ^m 24 ^s
Склонение	+5° 13'30"	+5° 13'33"
Параллакс	0.286"	0.263"
Вид. звездная величина	+0.40	+9.84

! Определим угловое расстояние между Проционом и звездой Лейтена на земном небе. Склонения этих звезд δ практически неотличимы друг от друга, и данное угловое расстояние определяется разницей прямых восхождений $\Delta\alpha$:

$$\gamma = \Delta\alpha \cdot \cos\delta = 2.962^\circ.$$



XIII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Из треугольника, изображенного на рисунке, можно определить расстояние между Проционом и звездой Лейтена в пространстве:

$$d = (l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \gamma)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi_1^2} + \frac{1}{\pi_2^2} - \frac{2 \cos \gamma}{\pi_1 \pi_2} \right)^{1/2}.$$

Здесь l_1 и l_2 — расстояния от Солнца до Проциона и звезды Лейтена, выраженные в парсеках, π_1 и π_2 — параллаксы Проциона и звезды Лейтена. Подставляя численные значения, получаем величину d : 0.36 пк. Зная звездные величины обеих звезд из окрестностей Земли m_1 и m_2 , получаем их величины при наблюдении с расстояния d , то есть из окрестностей друг друга:

$$m_{12} = m_1 + 5 \lg \frac{d}{l_1} = m_1 + 5 \lg (d\pi_1) = -4.5,$$

$$m_{21} = m_2 + 5 \lg \frac{d}{l_2} = m_2 + 5 \lg (d\pi_2) = +4.7.$$

Выходит, что Процион из окрестностей звезды Лейтена выглядит как Венера на земном небе, а звезда Лейтена будет видна невооруженным глазом из окрестностей Проциона.

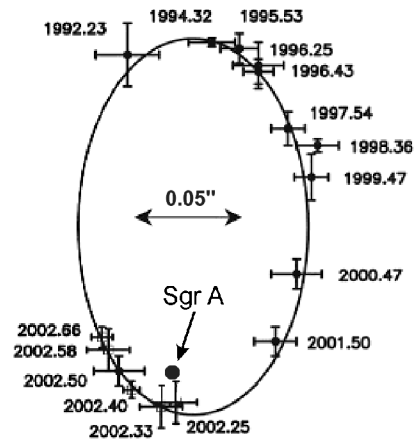


Центр Галактики (В.М. Чаругин)

Класс: **10**

Задача: **3**

? На рисунке представлены окрестности центра Галактики (Sgr A) и наблюдаемая траектория движения звезды S0-2 вокруг центра. Отмечены даты измерений положений звезды и угловой масштаб фотографии (длина двусторонней стрелки соответствует 0.05"). Принимая расстояние до центра Галактики равным 8 кпк, оцените массу центрального тела Галактики. Какова может быть природа этого тела (на рисунке его положение показано стрелкой)?



! Как видно из рисунка, орбита звезды S0-2 достаточно сильно вытянута. Хотя период наблюдений (с 1992 до 2002 года) не охватывают всего орбитального периода системы, он тем не менее включает в себе эпохи прохождения перигея и апогея. Из этих данных нетрудно оценить орбитальный период системы T : около 15 лет.

Значение угла наклона плоскости орбиты звезды S0-2 к картинной плоскости неизвестно, поэтому мы лишь можем сказать, что большая полуось орбиты звезды S0-2 а не меньше, чем большая полуось видимого эллипса — проекции на картинную плоскость. Угловые размеры большой полуоси

Практический тур

составляют примерно $0.09''$, что при расстоянии 8 кпк соответствует 720 а.е. Воспользовавшись обобщенным III законом Кеплера, получаем оценку массы центрального тела (в массах Солнца):

$$M \geq \frac{a^3}{T^2} = 1.7 \cdot 10^6.$$

Несмотря на свою гигантскую массу, объект достаточно компактен. Есть все основания утверждать, что в центре нашей Галактики находится сверхмассивная черная дыра.



Поиск обитаемых планет (Н.И. Перов)

Класс: **11**

Задача: **2**

? Из анализа условий, необходимых для существования жизни типа земной, на планете должна сформироваться и удерживаться (в течение длительного времени) азотно-кислородная атмосфера при температуре 273 К, а ускорение силы тяжести g должно быть заключено в интервале от 5 до 15 м/с². Укажите на диаграмме "радиус планеты (R) – масса планеты (M)" область потенциально обитаемых планет.

! Для того, чтобы азотно-кислородная атмосфера на планете существовала в течение длительного времени, необходимо, чтобы средняя тепловая скорость молекул была меньше второй космической скорости у поверхности (на самом деле, это ограничение гораздо строже, тепловая скорость должна быть во много раз меньше). Данное условие можно записать как

$$\sqrt{\frac{3kT}{m}} < \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

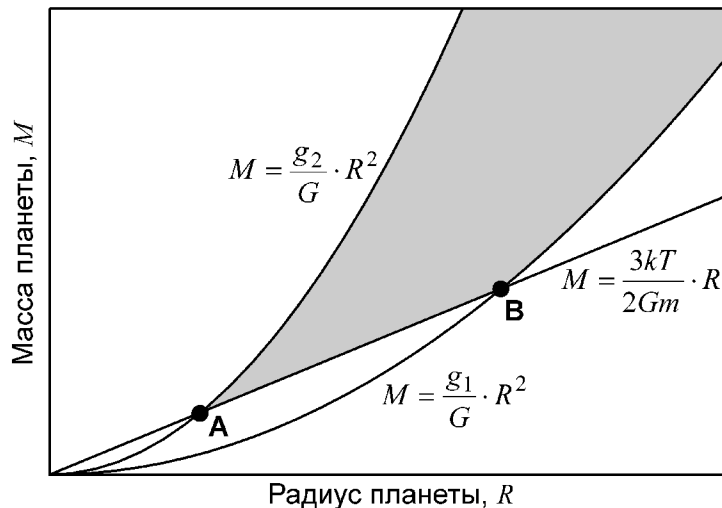
где T – заданная температура атмосферы, m – масса молекулы (примем ее равной 30 массам протона или $5 \cdot 10^{-26}$ кг), M и R – масса и радиус планеты. Из этого вытекает соотношение между массой и радиусом:

$$M > \frac{3kT}{2Gm} \cdot R.$$

Данное неравенство ограничивает область обитаемых планет на диаграмме "радиус-масса" снизу прямой, проходящей через начало координат. Другое ограничение получается из требования на величину ускорения свободного падения:

$$g_1 < \frac{GM}{R^2} < g_2; \quad \frac{g_1}{G} \cdot R^2 < M < \frac{g_2}{G} \cdot R^2.$$

Здесь g_1 и g_2 – заданные минимальное и максимальное ускорения силы тяжести на поверхности планеты. Условие ограничивает область обитаемых планет двумя параболой, также проходящими через центр координат. В результате, мы получаем картину, изображенную на рисунке.



Для полного задания картины нам нужно определить координаты точек **А** и **В**, то есть найти радиусы и массы планет в этих предельных случаях. Для точки **А** имеем:

$$\frac{3kT}{2Gm} \cdot R = \frac{g_2}{G} \cdot R^2; \quad R = \frac{3kT}{2mg_2}; \quad M = \frac{9k^2T^2}{4Gg_2m^2}.$$

Численная подстановка дает значение радиуса 7.5 км и массы $1.3 \cdot 10^{19}$ кг. Для точки **В** имеем аналогичные выражения

$$R = \frac{3kT}{2mg_1}; \quad M = \frac{9k^2T^2}{4Gg_1m^2}$$

и втрое большие величины радиуса и массы: около 22.5 км и $3.8 \cdot 10^{19}$ кг. Мы видим, что данные точки соответствуют очень маленьким, но при этом весьма плотным планетам (плотность порядка 10^6 кг/м³). Более типичные планеты, похожие на Землю, находятся далеко в верхней части участка, закрашенного на рисунке серым цветом.



Метеор вблизи Веги (А.М. Татарников)

Класс:

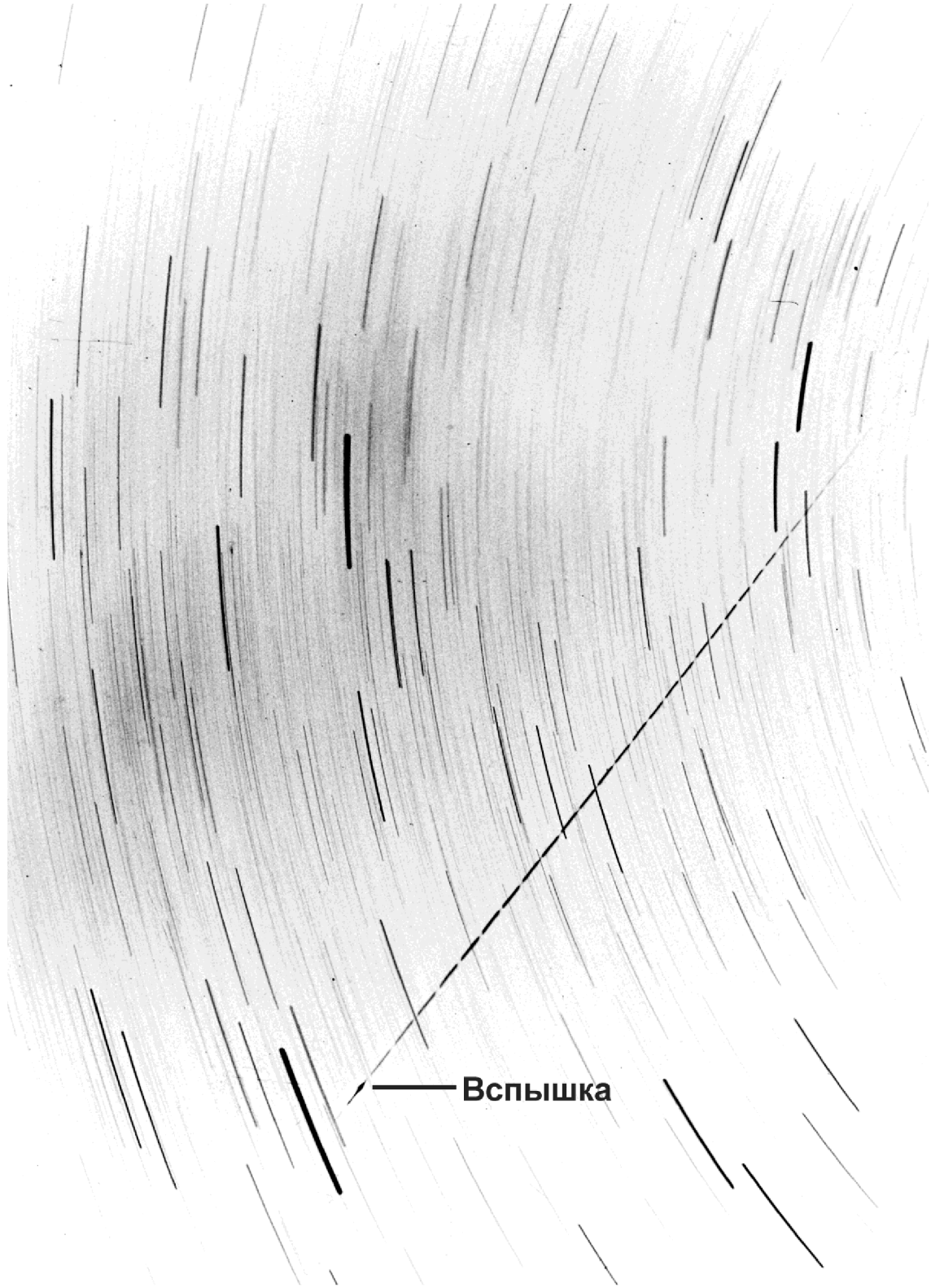
11

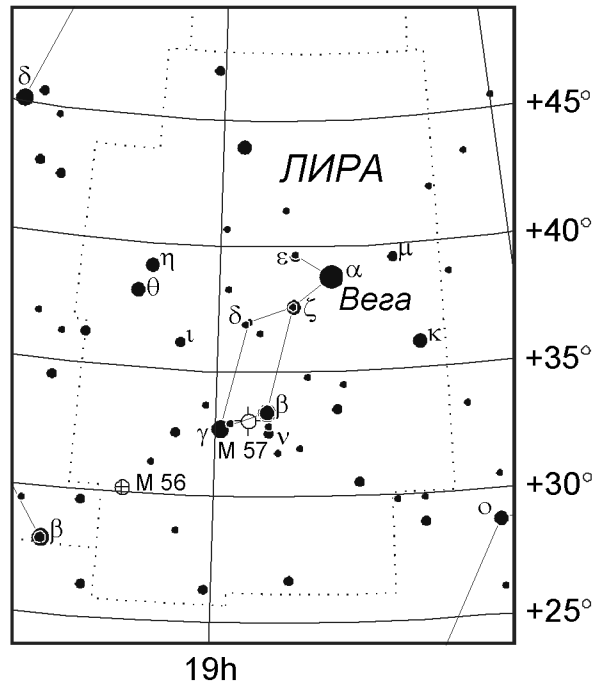
Задача:

3

? Вам выдан снимок метеора из потока Персеиды, полученный в некотором пункте **А** (55° с.ш., 37° в.д.). Снимок получен на камеру, оснащенную двухлопастным обтюратором с периодом вращения 15 оборотов в секунду. Вспышку, зафиксированную в конце полета метеора, увидел еще один наблюдатель (пункт **В**), находившийся в 3 км к северу от пункта **А**. При этом он заметил, что она точно совпала с положением Веги (α Лиры), которая как раз кульминировала в этот момент. Определите высоту этой яркой вспышки метеора над поверхностью Земли и среднюю скорость движения метеора, если известно, что угловое расстояние между Вегой и радиантом Персеид составляет 74° . При решении можно воспользоваться прилагаемой звездной картой созвездия Лиры.

Практический тур

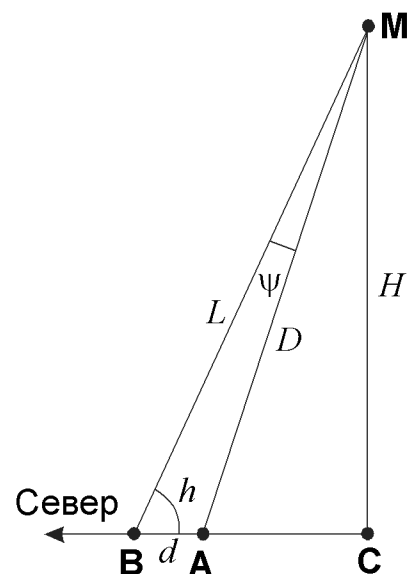




! Карта созвездия Лиры с координатной сеткой нужна для того, чтобы отождествить на фотографии Вегу и несколько ближайших звезд и восстановить угловой масштаб снимка. Для этого мы определяем по карте угловое расстояние между какими-нибудь двумя звездами созвездия (например, между α и γ Лиры, оно равно 7.5°) и вычисляем соответствующее расстояние между верхними (или нижними) концами треков этих звезд на рисунке.

По условию задачи, в момент вспышки метеора Вега находилась в кульминации в пункте **В**, а значит, и в пункте **А**, так как оба пункта находятся на одном географическом меридиане. Вега в момент кульминации движется своим суточным движением с востока на запад, перпендикулярно параллактическому смещению метеора при перемещении наблюдателя из точки **А** в точку **В**, где вспышка метеора совпала с положением Веги. Следовательно, чтобы определить положение Веги на треке в момент вспышки метеора, нужно опустить перпендикуляр из точки вспышки на трек Веги. Мы попадаем примерно в середину трека, то есть, метеор пролетел в середине экспозиции. По вычисленному масштабу фотографии находим угловое расстояние между метеором и Вегой ψ , оно получается равным примерно 2.2° . Именно на такую величину смещается метеор при перемещении из пункта **А** в пункт **В**, причем он смещается в южном направлении.

Пункт **В** удален от пункта **А** на расстоянии d , равное 3 км, или всего на $1.5'$ к северу, и высота Веги в верхней кульминации в этих пунктах составит



Практический тур

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = 74^\circ.$$

Здесь φ — широта, δ — склонение Веги, которое можно определить по карте созвездия Лиры. В точке **В** положение метеора совпадает с положением Веги. Расстояние от точки **В** до метеора определяется по теореме синусов:

$$L = d \cdot \frac{\sin(h + \psi)}{\sin \psi}$$

или 76 км. Высота метеора равна

$$H = L \sin h = d \cdot \frac{\sin(h + \psi) \sin h}{\sin \psi},$$

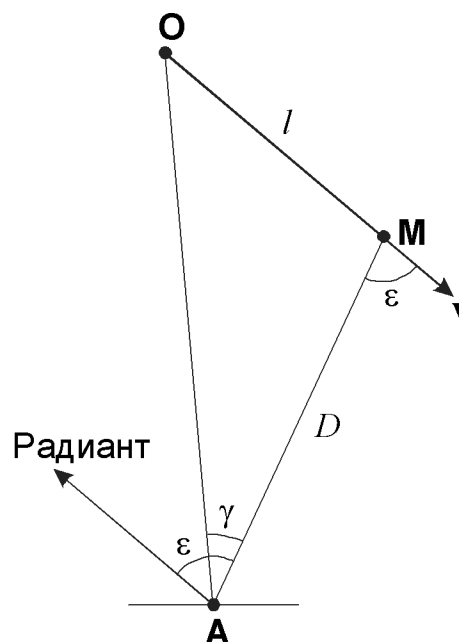
а его расстояние от точки **А**, где сделан снимок:

$$D = \frac{H}{\sin(h + \psi)} = d \cdot \frac{\sin h}{\sin \psi}.$$

Подставляя численные данные, получаем высоту метеора 73 км и его расстояние от точки **А** 75 км. Для определения средней скорости метеора измерим по фотографии его угловую длину γ , она получается равной 33° . При этом изображение метеора состоит из 31 штриха. При наблюдении из пункта **А** трек метеора закончился на расстоянии $\varepsilon = 72^\circ$ от радианта (на 2° ближе Веги). Длина пути метеора вычисляется по теореме синусов:

$$l = D \frac{\sin \gamma}{\sin(\varepsilon - \gamma)} = 65 \text{ км.}$$

Временной период штриховки, образованный вращением двухлопастного обтюратора со скоростью 15 оборотов в секунду, составляет $1/30$ секунды, следовательно, продолжительность полета метеора составляла 1.03 секунды. В итоге, средняя скорость метеора равна 63 км/с.





ДЛЯ ЗАМЕТОК

