

Региональный этап Всероссийской олимпиады по астрономии 2006 года

Условия задач

9 класс

1. Может ли созвездие Южного Креста (склонение около -60°) наблюдаться в северной части неба? Если да, то в каких районах на Земле?
2. Наблюдатель находится на Земле в точке с координатами 55° с.ш., 83° в.д. Какое время будут показывать часы наблюдателя во время верхней кульминации Солнца в день летнего солнцестояния, если данная точка наблюдения принадлежит к пятому часовому поясу?
3. Самолет летит на высоте 10 км вдоль земного экватора с запада на восток со скоростью 800 км/ч. Искусственный спутник Земли обращается вокруг нашей планеты по круговой орбите так, что все время находится над самолетом. Найти расстояние между спутником и самолетом.
4. Планета обращается вокруг Солнца по круговой орбите в плоскости эклиптики. Ее синодический период составляет ровно 1 год. Найти радиус орбиты планеты.
5. Суммарный блеск двойной звезды составляет 5^m , а блеск одной из ее компонент равен 6^m . Во сколько раз вторая компонента ярче или слабее первой?
6. С 1079 года по середину XIX века в Иране использовался солнечный календарь, разработанный Омаром Хайямом. В этом календаре обычный год состоял из 365 дней, а високосный – из 366, причем из каждых 33 лет 8 было високосных (3-й, 7-й, 11-й, 15-й, 20-й, 24-й, 28-й, 32-й). Сравните этот календарь с юлианским и григорианским. Какой из них более точный? Продолжительность тропического года составляет 365.24219 суток.

10 класс

1. Оцените, на каком расстоянии может находиться столб с фонарем, чтобы ночью его можно было перепутать со звездой вблизи горизонта.
2. Наблюдатель находится на Земле в точке с координатами 55° с.ш., 83° в.д. Какое время будут показывать часы наблюдателя во время верхней кульминации Солнца в день летнего солнцестояния, если данная точка наблюдения принадлежит к пятому часовому поясу?
3. Самолет летит на высоте 10 км вдоль земного экватора с запада на восток со скоростью 800 км/ч. Искусственный спутник Земли обращается вокруг нашей планеты по круговой орбите так, что все время находится над самолетом. Найти расстояние между спутником и самолетом.
4. Радиант метеорного потока Драконида располагается вблизи Северного полюса эклиптики, а метеоры влетают в атмосферу Земли со скоростью 20 км/с. Определите наклон орбиты Драконид к плоскости орбиты Земли.
5. Космический аппарат будущего удаляется от Земли со скоростью 3000 км/с. Для поддержания контакта с кораблем каждые 1000 секунд с Земли на корабль посылаются радиоимпульсы, который ровно через 1 секунду после принятия на корабле запускается обратно к Земле. С каким интервалом по времени на Земле будут приниматься ответные импульсы?
6. Две звезды имеют одинаковые массы и светимости, но поверхность одной из них вдвое горячее поверхности второй. У какой из звезд средняя плотность больше? Во сколько раз?

11 класс

1. Оцените, на каком расстоянии может находиться столб с фонарем, чтобы ночью его можно было перепутать со звездой вблизи горизонта.
2. Две звезды солнечной массы обращаются вокруг общего центра масс за 25 суток. Третья звезда, так же похожая на Солнце, обращается вокруг этой пары на расстоянии в 100 раз больше, чем расстояние между первыми двумя звездами. Каков период обращения третьей звезды? Докажите, что эта система устойчива.
3. По одной орбите с эксцентриситетом e и большой полуосью a вокруг Земли летают два спутника и наблюдают земную поверхность. В момент, когда один из них находится в перигее, другой находится в апогее. Определить, какую часть земной поверхности они наблюдают в этот момент. Считать, что в даже перигее расстояние спутника от центра Земли существенно больше радиуса Земли. Атмосферной рефракцией пренебречь.
4. Радиант метеорного потока Драконида располагается вблизи Северного полюса эклиптики, а метеоры влетают в атмосферу Земли со скоростью 20 км/с. Определите наклон орбиты Драконид к плоскости орбиты Земли.
5. Космический аппарат будущего удаляется от Земли со скоростью 3000 км/с. Для поддержания контакта с кораблем каждые 1000 секунд с Земли на корабль посылаются радиоимпульсы, который ровно через 1 секунду после принятия на корабле запускается обратно к Земле. С каким интервалом по времени на Земле будут приниматься ответные импульсы?
6. Две звезды имеют одинаковые массы и светимости, но поверхность одной из них вдвое горячее поверхности второй. У какой из звезд средняя плотность больше? Во сколько раз?

Решения задач

9 класс

1. Да, может. Южнее параллели 60° ю.ш. созвездие Южного Креста будет проходить точку верхней кульминации высоко над горизонтом к северу от зенита.
2. Долгота точки наблюдения составляет 83° или $5ч32м$. Именно настолько полдень в этой точке будет происходить раньше, чем на нулевом меридиане. Пренебрегая уравнением времени, получаем, что полдень в точке наблюдения наступит в $6ч28м$ по всемирному времени (или времени нулевого меридиана). Однако разница поясного и всемирного времени в данной точке в день летнего солнцестояния составляет 7 часов: 5 часов в соответствии с номером часового пояса плюс 1 час (декретное время) и еще плюс 1 час (летнее время). В итоге, верхняя кульминация Солнца в данной точке будет наблюдаться в $13ч28м$.
3. Самолет движется со скоростью $v = 800$ км/ч относительно точки на экваторе Земли, которая сама движется в ту же сторону за счет осевого вращения Земли. Скорость этого движения определяется формулой

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T_0}$$

и составляющей 1674 км/ч. Здесь R – экваториальный радиус Земли (6378.1 км), а T_0 – продолжительность звездных суток (23.933 часа). Полная скорость самолета составляет 2474 км/ч. Двигаясь с такой скоростью, самолет сделает полный оборот вокруг Земли за время

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v+v_0},$$

то есть за 16.22 часа. Здесь h – высота самолета над поверхностью Земли. Чтобы постоянно находиться над самолетом, искусственный спутник должен обращаться вокруг Земли в том же направлении и с тем же периодом T . Радиус орбиты спутника вычисляется из обобщенного III закона Кеплера:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

что составляет 32.53 тысячи километров (M – масса Земли). Расстояние между спутником и самолетом будет равно

$$d = r - h - R = 26.14 \text{ тыс. км.}$$

4. Сразу можно сказать, что планета обращается вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля. В противном случае, двигаясь навстречу Земле, она оказывалась бы на луче Солнце – Земля чаще одного года, вне зависимости от того, внутренняя эта планета или внешняя.

Синодический период планеты S , обращающейся вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля, равен

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right|,$$

где T и T_0 – периоды обращения данной планеты и Земли вокруг Солнца. Так как величины S и T_0 равны друг другу, а величина T не может обращаться в бесконечность, мы можем сделать вывод, что выражение под знаком модуля положительно, и период обращения планеты вокруг Солнца T составляет полгода, то есть планета внутренняя. Радиус орбиты планеты a , выраженный в астрономических единицах, вычисляется из периода T в годах по III закону Кеплера:

$$a = T^{2/3} = 0.63 \text{ а.е.}$$

5. Разница в одну звездную величину соответствует отношению яркостей, равному 2.512. Двойная звезда, имеющая блеск 5^m , в 2.512 раза ярче первой из звезд, имеющей блеск 6^m . Следовательно, вторая звезда ярче первой в 1.512 раза.
6. 33-летний цикл календаря Омара Хайяма состоит из 25 годов по 365 дней и 8 годов по 366 дней. Цикл юлианского календаря равен 4 годам, 3 из которых делятся по 365 дней и 1 – 366 дней. Наконец, цикл григорианского календаря составляет 400 лет, из которых 303 года продолжаются по 365 дней и 97 лет делятся по 366 дней. Определим среднюю продолжительность одного года для каждого из этих календарей в сутках:

$$T_1 = \frac{25 \cdot 365 + 8 \cdot 366}{33} = 365.24[24],$$

$$T_2 = \frac{3 \cdot 365 + 1 \cdot 366}{4} = 365.25,$$

$$T_3 = \frac{303 \cdot 365 + 97 \cdot 366}{400} = 365.2425.$$

Истинная продолжительность тропического года составляет 365.24219 суток. Получается, что у всех трех календарей средняя продолжительность года чуть больше, чем требуется, у календаря Омара Хайяма эта разница составляет 0.00023 суток или 20 секунд, у юлианского календаря – 0.00781 суток или 11.25 минут, у григорианского – 0.00031 суток или 27 секунд. Выходит, что календарь Омара Хайяма – самый точный из всех трех, превосходя в точности григорианский календарь в 1.35 раза, а юлианский – в 34 раза.

10 класс

1. Спутать фонарь со звездой можно, если по яркости фонарь не превзойдет самые яркие из звезд. Оценим, на каком расстоянии от наблюдателя фонарь будет выглядеть как звезда 0^m . Для этого сравним его с Солнцем, имеющим звездную величину -26.8^m . Как известно, на площадку площадью 1 м^2 , перпендикулярную направлению на Солнце за одну секунду попадает 1360 Дж солнечной энергии (эта величина известна как солнечная постоянная, обозначим ее J_0). Количество энергии, попадающей ежесекундно на ту же площадку от фонаря, равно

$$J = J_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot 26.8} = 2.59 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/с} \cdot \text{м}^2.$$

Примем мощность фонаря P равной 300 Вт. Последние две величины связаны соотношением

$$J = \frac{P}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от фонаря для наблюдателя (поглощением света в атмосфере пренебрегаем). Подставляя численные данные, получаем, что это расстояние равно 30 км. Это больше, чем радиус видимости в обычной равнинной местности. Поэтому все видимые нами уличные фонари на равнине выглядят ярче звезд. Увидеть столь далекий фонарь и спутать его со звездой можно лишь в горах.

2. Долгота точки наблюдения составляет 83° или $5\text{ч}32\text{м}$. Именно настолько полдень в этой точке будет происходить раньше, чем на нулевом меридиане. Пренебрегая уравнением времени, получаем, что полдень в точке наблюдения наступит в $6\text{ч}28\text{м}$ по всемирному времени (или времени нулевого меридиана). Однако разница поясного и всемирного времени в данной точке в день летнего солнцестояния составляет 7 часов: 5 часов в соответствии с номером часового пояса плюс 1 час (декретное время) и еще плюс 1 час (летнее время). В итоге, верхняя кульминация Солнца в данной точке будет наблюдаться в $13\text{ч}28\text{м}$.
3. Самолет движется со скоростью $v = 800$ км/ч относительно точки на экваторе Земли, которая сама движется в ту же сторону за счет осевого вращения Земли. Скорость этого движения определяется формулой

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T_0}$$

и составляющей 1674 км/ч. Здесь R – экваториальный радиус Земли (6378.1 км), а T_0 – продолжительность звездных суток (23.933 часа). Полная скорость самолета составляет 2474 км/ч. Двигаясь с такой скоростью, самолет сделает полный оборот вокруг Земли за время

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v+v_0},$$

то есть за 16.22 часа. Здесь h – высота самолета над поверхностью Земли. Чтобы постоянно находиться над самолетом, искусственный спутник должен обращаться вокруг Земли в том же направлении и с тем же периодом T . Радиус орбиты спутника вычисляется из обобщенного III закона Кеплера:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

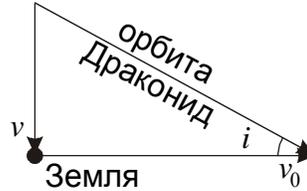
что составляет 32.53 тысячи километров (M – масса Земли). Расстояние между спутником и самолетом будет равно

$$d = r - h - R = 26.14 \text{ тыс. км.}$$

4. Данная в условии задачи скорость Драконида u – это скорость их влета в атмосферу Земли. До сближения с Землей и ускорения в ее поле тяготения скорость метеоров можно определить по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{u^2 - v_2^2}.$$

Здесь v_2 – вторая космическая скорость для Земли (11.2 км/с). В итоге, геоцентрическая скорость Драконида до сближения с Землей составляет 16.6 км/с и направлена перпендикулярно плоскости орбиты Земли. В свою очередь Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью v_0 , равной 29.8 км/с.



Как видно из рисунка, угол наклона орбиты метеоров равен

$$i = \arctg \frac{v}{v_0} = 29^\circ.$$

5. Пусть в некоторый момент, через время t_0 после старта корабля с Земли отправляется один из импульсов на космический корабль. В системе отсчета, связанной с Землей, этот импульс будет принят на корабле в момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{v \cdot t_0}{c - v} = t_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c - v}\right) \approx t_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

где v – скорость корабля, значительно меньшая скорости света. Ответный импульс будет послан через время τ после приема. Расстояние корабля от Земли в это время составит

$$L = v \cdot (t_1 + \tau) = v t_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) + v \tau.$$

Ответный импульс будет принят на Земле в момент

$$t_2 = t_1 + \tau + \frac{L}{c} \approx t_0 + 2t_0 \frac{v}{c} + \tau \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Следующий импульс будет отправлен в момент времени $t_0 + \Delta t_0$, а принят в момент $t_2 + \Delta t_2$. Из последней формулы можно получить

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right).$$

Подставляя численные значения, получаем, что интервал приема импульсов составит 1020 секунд.

6. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды пропорциональна $R^2 T^4$, где R и T – ее радиус и температура. Равенство светимостей при температурах, отличных в два раза, означает, что более холодная звезда имеет радиус, в 4 раза больший, чем у горячей звезды. А при равенстве масс это означает, что плотность более холодной звезды в 64 раза меньше, чем у горячей звезды.

11 класс

1. Спутать фонарь со звездой можно, если по яркости фонарь не превзойдет самые яркие из звезд. Оценим, на каком расстоянии от наблюдателя фонарь будет выглядеть как звезда 0^m . Для этого сравним его с Солнцем, имеющим звездную величину -26.8^m . Как известно, на площадку площадью 1 м^2 , перпендикулярную направлению на Солнце за одну секунду попадает 1360 Дж солнечной энергии (эта величина известна как солнечная постоянная, обозначим ее J_0). Количество энергии, попадающей ежесекундно на ту же площадку от фонаря, равно

$$J = J_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot 26.8} = 2.59 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/с} \cdot \text{м}^2.$$

Примем мощность фонаря P равной 300 Вт. Последние две величины связаны соотношением

$$J = \frac{P}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от фонаря для наблюдателя (поглощением света в атмосфере пренебрегаем). Подставляя численные данные, получаем, что это расстояние равно 30 км. Это больше, чем радиус видимости в обычной равнинной местности. Поэтому все видимые нами уличные фонари на равнине выглядят ярче звезд. Увидеть столь далекий фонарь и спутать его со звездой можно лишь в горах.

2. Расстояние между двумя звездами в тесной паре определяется из обобщенного III закона Кеплера:

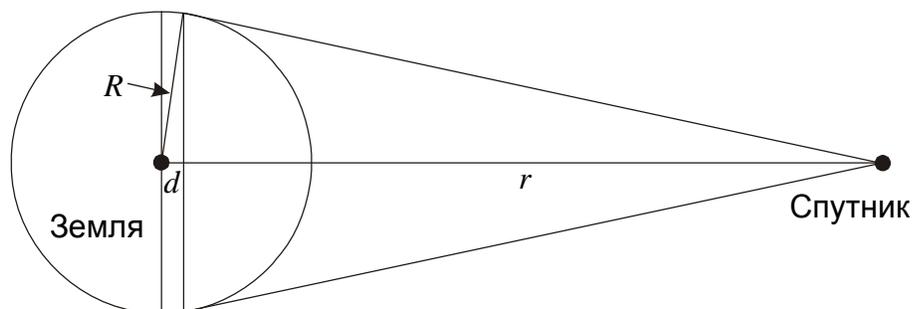
$$a = \left(\frac{G \cdot 2MT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

и составляет 0.21 а.е. Здесь M – масса Солнца, T – период обращения звезд. Третья звезда обращается на расстоянии $b = 21$ а.е. от данной пары. Период ее обращения можно также найти по III закону Кеплера, однако при этом нужно учесть, что суммарная масса системы составляет уже 3 массы Солнца:

$$t = \left(\frac{4\pi^2 b^3}{G \cdot 3M} \right)^{1/2}.$$

Период получается равным 55.9 лет. Система устойчива, так как разность гравитационных ускорений, придаваемых третьей звездой двум первым звездам, значительно меньше ускорения взаимодействия этих двух звезд.

3. Определим вначале, какую часть поверхности Земли можно увидеть со спутника, находящегося на расстоянии r от ее центра, существенно превышающим радиус Земли (см. рисунок).



Мы видим, что со спутника будет видно меньше половины поверхности Земли. Кроме задней полусферы, в область невидимости попадет узкая полоса вокруг лимба, которую мы можем считать цилиндрической с радиусом, равным радиусу Земли R и шириной d . Из подобия прямоугольных треугольников мы можем записать:

$$\frac{d}{R} = \frac{R}{r}.$$

Доля площади поверхности Земли, видимая со спутника, составит

$$S = \frac{2\pi R^2 - 2\pi R d}{4\pi R^2} = \frac{1 - (R/r)}{2}.$$

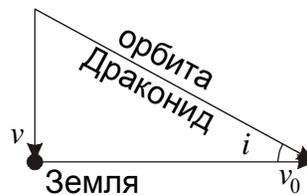
В условии задачи Земля наблюдается с двух спутников, находящихся в перигее и апогее общей орбиты с большой полуосью a и эксцентриситетом e . Области Земли, видимые с этих спутников, не перекрываются, и общая часть поверхности Земли, видимой со спутников, равна сумме частей, видимых с каждого из них. Таким образом,

$$S = \frac{1 - \frac{R}{a(1+e)}}{2} + \frac{1 - \frac{R}{a(1-e)}}{2} = 1 - \frac{R}{a} \cdot \frac{1}{1-e^2}.$$

4. Данная в условии задачи скорость Драконида u – это скорость их влета в атмосферу Земли. До сближения с Землей и ускорения в ее поле тяготения скорость метеоров можно определить по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{u^2 - v_2^2}.$$

Здесь v_2 – вторая космическая скорость для Земли (11.2 км/с). В итоге, геоцентрическая скорость Драконида до сближения с Землей составляет 16.6 км/с и направлена перпендикулярно плоскости орбиты Земли. В свою очередь Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью v_0 , равной 29.8 км/с.



Как видно из рисунка, угол наклона орбиты метеоров равен

$$i = \arctg \frac{v}{v_0} = 29^\circ.$$

5. Пусть в некоторый момент, через время t_0 после старта корабля с Земли отправляется один из импульсов на космический корабль. В системе отсчета, связанной с Землей, этот импульс будет принят на корабле в момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{v \cdot t_0}{c - v} = t_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c - v}\right) \approx t_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

где v – скорость корабля, значительно меньшая скорости света. Ответный импульс будет послан через время τ после приема. Расстояние корабля от Земли в это время составит

$$L = v \cdot (t_1 + \tau) = vt_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) + v\tau.$$

Ответный импульс будет принят на Земле в момент

$$t_2 = t_1 + \tau + \frac{L}{c} \approx t_0 + 2t_0 \frac{v}{c} + \tau \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Следующий импульс будет отправлен в момент времени $t_0 + \Delta t_0$, а принят в момент $t_2 + \Delta t_2$. Из последней формулы можно получить

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right).$$

Подставляя численные значения, получаем, что интервал приема импульсов составит 1020 секунд.

- По закону Стефана-Больцмана светимость звезды пропорциональна $R^2 T^4$, где R и T – ее радиус и температура. Равенство светимостей при температурах, отличных в два раза, означает, что более холодная звезда имеет радиус, в 4 раза больший, чем у горячей звезды. А при равенстве масс это означает, что плотность более холодной звезды в 64 раза меньше, чем у горячей звезды.