Теоретический тур

8 класс.

1. **Сыктывкар и Красноярск.** ***(М.Г. Гаврилов, февраль 2002.)*** Простой ответ очевиден – это разница широт городов (5°37'), и, поскольку Сыктывкар севернее, высота кульминации Солнца там меньше. Однако, поскольку Сыктывкар находится на 41°59' (примерно на 42°) западнее Красноярска, полдень (а, следовательно, и кульминация Солнца) наступит там на 2 часа 47 минут 56 секунд (≈ 2 часа 48 минут = 2,8 часа) позже. А за это время склонение Солнца увеличится! Из эфемерид Солнца находим, что изменение склонения за 8 апреля составит

$$7°23'08{,}6'' - 7°00'42{,}0'' = 22'26{,}6'' \approx 22{,}4',$$

то есть за 2,8 часа оно увеличится примерно на $22{,}4'\cdot 2{,}8 / 24 = 2{,}62' \approx 3'$. Наиболее точный ответ мы можем дать с точностью до одной угловой минуты. Итак, получаем: разность широт минус три угловых минуты, то есть 5°34'.

2. **Наблюдения Полярной звезды.** ***(А.В. Засов в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Из условия следует, что радиус поля зрения телескопа равен расстоянию Полярной от полюса мира (примерно 44 угловые минуты). Обозначим положение полюса мира точкой P, центра поля зрения – точкой O, точки появления Полярной в поле зрения – точкой C. Треугольник POC – равносторонний, каждая сторона которого равна радиусу поля зрения. Отсюда угол CPO равен 60°, или 1/6 окружности. Значит, Полярная перемещается по окружности от C до O ровно 24 : 6 = 4 часа, а полная продолжительность её наблюдения в поле зрения – вдвое больше. Ответ: 8 часов.

3. **Яркий Сириус.** ***(М.Г. Гаврилов, 2000.)*** Сириус является самой яркой звездой (в историко-классическом понимании звезды) на нашей земной небесной сфере. Поэтому в первом приближении он будет самой яркой звездой в тех местностях на Земле, где бывает виден, то есть, хотя бы иногда появляется над горизонтом. Поскольку небесное склонение Сириуса равно $\delta = -16°43'$, то он будет виден во всём южном полушарии, а также – в северном на широтах не выше, чем 16°43' от полюса, то есть, на широтах до 73°17'. Второе приближение – учёт рефракции (35' у горизонта). С учётом рефракции Сириус может быть виден в местностях до 73°52' с.ш. Ну а в третьем приближении надо учесть поглощение света. Очевидно, что Вега высоко в небе существенно ярче Сириуса у горизонта. Высоты, на которых Сириус становится слабее Веги, грубо можно оценить в 5°. Таким образом, Сириус является самой яркой звездой на небе для местностей южнее 68° - 69° с.ш.

4. **Наблюдения на РАТАНе.** ***(М.Г. Гаврилов, 2001.)*** Второй объект будет наблюдаться после первого через время, за которое небесная сфера повернётся на угол $\Delta\alpha$. Поскольку на 360° небесная сфера поворачивается за $23^ч\,56^м\,04^с$ (звёздные сутки), на угол $\Delta\alpha$ она повернётся за время $\Delta\alpha \cdot 23^ч\,56^м\,04^с / 360°$. Для $\Delta\alpha = 90°$ это составит $5^ч\,59^м\,01^с$.

5. **Лунное движение.** ***(Б.А. Воронцов-Вельяминов–В.Г. Сурдин в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Главная причина – эллиптичность лунной орбиты и связанная с ней неравномерность движения по ней Луны, поскольку, согласно II закону Кеплера скорость движения спутника по орбите тем меньше, чем больше расстояние от центрального тела. Поэтому максимум такого эффекта наступает тогда, когда направление на Солнце перпендикулярно большой оси лунной орбиты и апогей орбиты Луны приходится примерно на первую четверть. Очевидно, что и обратная ситуация возможна, – в том случае, когда на первую четверть приходится перигей лунной орбиты.

6. **Заходы на Луне.** ***(М.Г. Гаврилов, 2000.)*** Солнце на Луне совершает один оборот по небосклону за 29,53 суток (смена фаз Луны, видимая с Земли, и движение солнечного диска по лунному небу, очевидно, происходят синфазно). Диаметр солнечного диска, видимый с Луны, такой же, как и видимый с Земли – около полуградуса. Продолжительность захода Солнца на экваторе – это время, за которое оно переместится на свой диаметр. Если перемещение на 360° происходит за 29,53 суток = 708,7 часов, то на 0,5° – за $708{,}7 \cdot 0{,}5°/360° \approx 1$ час.

   Что же касается захода Земли, то в первом приближении она там никогда не заходит и не восходит, а висит на одном месте (вспомните, что Луна обращена к Земле всё время одной стороной), либо не видна (для обратной стороны Луны). Однако, при более точном рассмотрении оказывается, что из-за эллиптичности лунной орбиты, её движение вокруг Земли происходит неравномерно; в то же время движение вокруг своей оси – равномерно. Это приводит к либрациям, то есть, к тому, что Луна обращена к нам не точно одной точкой, а немного "качается". А для лунного наблюдателя это означает, что Земля немного гуляет по небу, удалясь порой на несколько градусов от своего среднего положения. В результате – есть на Луне территории, где действительно можно наблюдать восходы и заходы Земли – это такие территории, где упомянутое среднее положение находится вблизи горизонта.

   Для вычисления продолжительности захода Земли необходимо знать величины либрации. (См. на эту тему задачу № 377 из сборника "Звёздный мир - IV".)

Теоретический тур

9 класс.

1. **Сыктывкар и Красноярск.** ***(М.Г. Гаврилов, февраль 2002.)*** Простой ответ очевиден – это разница широт городов (5°37'), и, поскольку Сыктывкар севернее, высота кульминации Солнца там меньше. Однако, поскольку Сыктывкар находится на 41°59' (примерно на 42°) западнее Красноярска, полдень (а, следовательно, и кульминация Солнца) наступит там на 2 часа 47 минут 56 секунд (≈ 2 часа 48 минут = 2,8 часа) позже. А за это время склонение Солнца увеличится! Из эфемерид Солнца находим, что изменение склонения за 8 апреля составит

$$7°23'08{,}6'' - 7°00'42{,}0'' = 22'26{,}6'' \approx 22{,}4',$$

то есть за 2,8 часа оно увеличится примерно на $22{,}4'·2{,}8 / 24 = 2{,}62' \approx 3'$. Наиболее точный ответ мы можем дать с точностью до одной угловой минуты. Итак, получаем: разность широт минус три угловых минуты, то есть 5°34'.

2. **Наблюдения Полярной звезды.** ***(А.В. Засов в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Из условия следует, что радиус поля зрения телескопа равен расстоянию Полярной от полюса мира (примерно 44 угловые минуты). Обозначим положение полюса мира точкой P, центра поля зрения – точкой O, точки появления Полярной в поле зрения – точкой C. Треугольник POC – равносторонний, каждая сторона которого равна радиусу поля зрения. Отсюда угол CPO равен 60°, или 1/6 окружности. Значит, Полярная перемещается по окружности от C до O ровно 24 : 6 = 4 часа, а полная продолжительность её наблюдения в поле зрения – вдвое больше. Ответ: 8 часов.

3. **Яркий Сириус.** ***(М.Г. Гаврилов, 2000.)*** Сириус является самой яркой звездой (в историко-классическом понимании звезды) на нашей земной небесной сфере. Поэтому в первом приближении он будет самой яркой звездой в тех местностях на Земле, где бывает виден, то есть, хотя бы иногда появляется над горизонтом. Поскольку небесное склонение Сириуса равно $\delta = -16°43'$, то он будет виден во всём южном полушарии, а также – в северном на широтах не выше, чем 16°43' от полюса, то есть, на широтах до 73°17'. Второе приближение – учёт рефракции (35' у горизонта). С учётом рефракции Сириус может быть виден в местностях до 73°52' с.ш. Ну а в третьем приближении надо учесть поглощение света. Очевидно, что Вега высоко в небе существенно ярче Сириуса у горизонта. Высоты, на которых Сириус становится слабее Веги, грубо можно оценить в 5°. Таким образом, Сириус является самой яркой звездой на небе для местностей южнее 68° - 69° с.ш.

4. **22750 звёзд.** ***(А.В. Засов, 2002.)*** Звёзды данной звёздной величины в 2,512 раз слабее предыдущей. Но их суммарный поток пропорционален полному числу звёзд. Поэтому звёзды, более слабые на одну звёздную величину, давали бы точно такой же световой поток, если бы их было в 2,512 раз больше по числу.

   В действительности мы имеем, что

   Число звёзд 5-й звёздной величины больше чем 4-й в 700/250 = 2,80 раза,
   Число звёзд 6-й звёздной величины больше чем 5-й в 1900/700 = 2,71 раза,
   Число звёзд 7-й звёздной величины больше чем 6-й в 5300/1900 = 2,79 раза,
   Число звёзд 8-й звёздной величины больше чем 7-й в 14600/5300 = 2,75 раза.

   Поскольку все отношения больше 2,512, вклад звёзд каждой последующей звёздной величины (в пределах рассматриваемого интервала величин) растёт с увеличением звёздной величины. Для более слабых звёзд этот закон нарушается, иначе бы всё небо ярко светилось.

   Ответ: восьмой звёздной величины.

5. **Спелеологи-гравиметристы.** ***(М.Г. Гаврилов, 1992, редакция 2000.)*** Спелеологи должны проводить измерения силы тяжести в различных точках на поверхности земли. Тогда в том случае, когда под ними находится некоторая полость радиуса R (объём пустого пространства – пространства, где плотность составляет не ρ_0, а 0), сила тяжести будет меньше. Для простоты рассмотрим шарообразную полость. Тогда в том случае, когда прямо под спелеологами находится полость радиуса R (то есть, пространство объёма $4/3\cdot\pi\cdot R^3$, где плотность составляет не ρ_0, а 0), сила тяжести будет меньше на величину

$$\Delta g = G\cdot\Delta M/L^2 = G\cdot\Delta\rho\cdot 4/3\cdot\pi\cdot R^3/L^2,$$

где L – расстояние от точки измерения до центра этой шаровой полости. Очевидно, наибольший эффект будет заметен тогда, когда $L \approx R$, то есть полость почти касается земной поверхности. В этом случае

$$\Delta g = G\cdot\Delta\rho\cdot 4/3\cdot\pi\cdot R^3/R^2 = G\cdot\Delta\rho\cdot 4/3\cdot\pi\cdot R.$$

Поскольку период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\cdot(l/g)^{1/2},$$

то изменение величины g на Δg приведёт к изменению периода колебаний маятника на величину $\Delta T/T = -(\Delta g/g)/2$. Таким образом:

$$2\Delta T/T = -(G\cdot\Delta\rho\cdot 4/3\cdot\pi\cdot R) / g.$$

Поскольку $\Delta\rho = 0 - \rho_0 = -\rho_0$, получаем

$$2\Delta T/T = (G\cdot\rho_0\cdot 4/3\cdot\pi\cdot R) / g,$$

Откуда:

$$R = (3/2\pi)\cdot(\Delta T/T)\cdot g / (G\cdot\rho_0).$$

Если предел чувствительности гравиметра составляет $2\cdot 10^{-5}$ %, то есть $\Delta T/T = 2\cdot 10^{-7}$, то радиус полости, измеряемый на пределе чувствительности получается равным 5,0 метров.

Ответ: полость с характерным размером (диаметром) порядка 10 метров.

6. **Заходы на Луне.** ***(М.Г. Гаврилов, 2000.)*** Солнце на Луне совершает один оборот по небосклону за 29,53 суток (смена фаз Луны, видимая с Земли, и движение солнечного диска по лунному небу, очевидно, происходят синфазно). Диаметр солнечного диска, видимый с Луны, такой же, как и видимый с Земли – около полуградуса. Продолжительность захода Солнца на экваторе – это время, за которое оно переместится на свой диаметр. Если перемещение на 360° происходит за 29,53 суток = 708,7 часов, то на 0,5° – за 708,7·0,5°/360° ≈ 1 час.

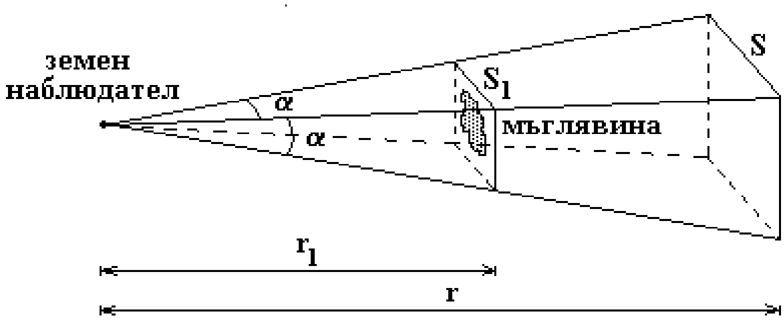
   Что же касается захода Земли, то в первом приближении она там никогда не заходит и не восходит, а висит на одном месте (вспомните, что Луна обращена к Земле всё время одной стороной), либо не видна (для обратной стороны Луны). Однако, при более точном рассмотрении оказывается, что из-за эллиптичности лунной орбиты, её движение вокруг Земли происходит неравномерно; в то же время движение вокруг своей оси – равномерно. Это приводит к либрациям, то есть, к тому, что Луна обращена к нам не точно одной точкой, а немного "качается". А для лунного наблюдателя это означает, что Земля немного гуляет по небу, удалясь порой на несколько градусов от своего среднего положения. В результате – есть на Луне территории, где действительно можно наблюдать восходы и заходы Земли – это такие территории, где упомянутое среднее положение находится вблизи горизонта.

Для вычисления продолжительности захода Земли необходимо знать величины либрации. (См. на эту тему задачу № 377 из сборника "Звёздный мир - IV".)

Теоретический тур

<u>**10 класс.**</u>

1. **Звёзды и туманность.** ***(Е.С. Божурова в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Почему на фоне туманности плотность звёзд меньше? Очевидно, потому, что часть их загораживает туманность (по-болгарски – "мъглявина").



Звёзды, регистрируемые на каждом из двух исследуемых участков снимка, принадлежат области пространства с формой пирамиды и определённым объёмом. Фотоаппарат болгарских астрономов находится в вершине пирамиды (точка «земен наблюдател»), основанием которой является часть сферы с радиусом, равным расстоянию до самых отдалённых звёзд, зарегистрированных на фотографии. По условию задачи звёзды равномерно распределены в пространстве, следовательно, число звёзд на данном участке снимка пропорционально объёму соответствующей пирамиды. Объём пирамиды с высотой h и площадью основания S есть:

$$V = h \cdot S / 3.$$

Для простоты рассмотрим участки с малыми угловыми размерами: такими, что можно не учитывать кривизну оснований соответствующих пирамид. Также для простоты сравним пирамиды с квадратными основаниями, пусть угловая длина сторон этих квадратов – α. Тогда высоты пирамид можно принять равными расстоянию до самых отдалённых звёзд, которые видны в соответствующих областях фотоснимка. Для случая на фоне туманности это r_1 – расстояние до туманности (так как она непрозрачная), а для случая вне туманности это r – расстояние до звёзд 15^m. Линейные длины сторон оснований двух пирамид равны $\alpha \cdot r_1$ и $\alpha \cdot r$, а площади этих оснований $S_1 = (\alpha r_1)^2$ и $S = (\alpha r)^2$. Объёмы этих двух пирамид:

$$V_1 = r_1 \cdot (\alpha r_1)^2 / 3 = \alpha^2 r_1^3 / 3,$$

$$V = r \cdot (\alpha r)^2 / 3 = \alpha^2 r^3 / 3.$$

Отношение числа звёзд в них:

$$N_1 / N = V_1 / V = (r_1 / r)^3$$

Из этого равенства получаем формулу для соотношения расстояний r_1 и r :

$$r_1 = r\,(N_1 / N)^{1/3}.$$

Чтобы найти расстояние r до самых слабых звёзд, используем классическую формулу, связывающую абсолютную звёздную величину M и видимую звёздную величину m. В нашем случае $M = 5^m$ для всех звёзд, а видимая звёздная величина самых слабых звёзд на снимке $m = 15^m$.

$$5 \lg r - 5 = m - M,$$

$$lg\ r = (m - M + 5) / 5,$$

$$lg\ r = 3,$$

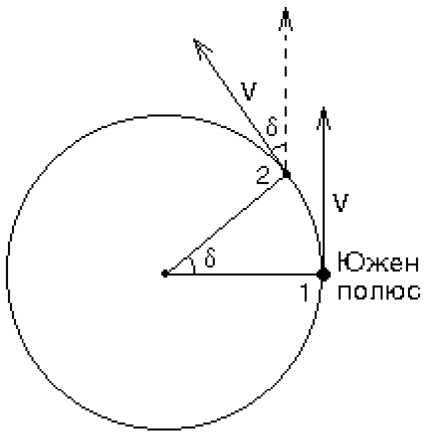
$$r = 1000\ пк.$$

Учитывая, что $N_1 / N = 10$, получаем :

$$r_1 = r\ (1/10)^{1/3} \approx 460\ пк.$$

Примечание: даже если бы мы учли кривизну оснований пирамид и рассмотрели бы произвольные формы их оснований (использовали точную формулу для объёма сферического сектора), результат получился бы точно такой же.

2. **Путешествия у полюса.** ***(Е.С. Божурова в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Двигаясь со скоростью 2 км/ч, участники экспедиции за 24 часа далеко не уйдут. Даже, если бы они шли по прямой, – и то, удалились бы не более, чем на 48 км. Поэтому мы можем не учитывать кривизну земного шара и считать, что полярники движутся по плоскости. Вектор их скорости всё время направлен к звезде Сириус. Сириус участвует в видимом суточном движении небесной сферы и за 24 часа проходит по небу приблизительно 361°. Дополнительный градус появляется потому, что звезда делает полный оборот не за 24 часа (солнечные сутки), а примерно за $23^ч 56^м$ (звёздные сутки, точнее – $24^ч \times 365{,}26 / 366{,}26 = 23^ч 56^м 04^с$). За остающиеся почти 4 минуты до окончания 24-го часа звезда проходит ещё около $(4^м : 60) \times 15° = 1°$. Следовательно, вектор скорости полярников равномерно вращается, отслеживая направление на Сириус и делая один полный оборот за одни звёздные сутки. По величине скорость движения полярников остаётся постоянной. Это означает, что они движутся по окружности длиной $23^ч 56^м 04^с \times 2$ км/ч = 47,869 км и радиусом $47{,}869 / 2\pi = 7{,}621$ км. Центр этой окружности находится в стороне от полюса. То есть, через звёздные сутки полярники вновь окажутся на полюсе, а за оставшиеся до окончания 24-го часа почти 4 минуты пройдут ещё 131 м.



При движение по окръжност, ако за даден интервал от време радиус-векторът на движещата се точка се завърти на ъгъл δ, то и векторът на скоростта се завърта на същия ъгъл δ.

3. **Разрешающая способность.** ***(А.В. Засов в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Из ограничения на разрешающую способность следует, что атмосфера меняет направление проходящих сквозь нее лучей случайным образом в пределах угла 0,5″. Оптические свойства рассеивающего слоя не зависят от того, с какой стороны от него находится источник. Поэтому свет, идущий от любой точки на поверхности Земли, также будет рассеиваться на тот же угол. Если даже предположить, что все рассеяние происходит на высоте 2 км, то «размазка» изображения деталей земной поверхности будет соответствовать диаметру

$$2000\ м \cdot \sin(0{,}5'') \approx 2000\ м \cdot 0{,}5 / 2 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^{-3}\ м = 5\ мм.$$

Если же учесть, что 2 км – это предельная высота рассеивающих слоев атмосферы, а средняя высота заведомо ниже, то можно рассматривать полученную оценку как верхний предел линейной разрешающей способности. С высоты 200 км отрезок полученного размера будет виден под углом в 100 раз меньшим, чем с высоты 2 км, то есть под углом уже не 1/2, а 1/200 угловой секунды. Дифракционная разрешающая способность δ в оптической области спектра составляет примерно λ/D, где λ – длина волны видимого света, примерно равная 5000 Å = $5\cdot10^{-7}$ м. Чтобы дифракция на краях объектива не мешала реализовать разрешающую способность в $\delta = 1''/200 \approx (1''/200)\cdot(1\ \text{рад}/200000'') = 2{,}5\cdot10^{-8}$ рад, надо иметь диаметр объектива телескопа $D = \lambda/\delta \approx 5\cdot10^{-7}\ \text{м} / 2{,}5\cdot10^{-8} = 20$ м. До осуществления таких возможностей пока далеко. Реально иметь космический телескоп с диаметром 1 м и разрешающей способностью 0,1″. Для него при наблюдении земной поверхности разрешение составит 10 см. Даже очень неспокойная атмосфера не помешает её реализовать.

4. **22750 звёзд.** ***(А.В. Засов, 2002.)*** Звёзды данной звёздной величины в 2,512 раз слабее предыдущей. Но их суммарный поток пропорционален полному числу звёзд. Поэтому звёзды, более слабые на одну звёздную величину, давали бы точно такой же световой поток, если бы их было в 2,512 раз больше по числу.

   В действительности мы имеем, что

   Число звёзд 5-й звёздной величины больше чем 4-й в 700/250 = 2,80 раза,
   Число звёзд 6-й звёздной величины больше чем 5-й в 1900/700 = 2,71 раза,
   Число звёзд 7-й звёздной величины больше чем 6-й в 5300/1900 = 2,79 раза,
   Число звёзд 8-й звёздной величины больше чем 7-й в 14600/5300 = 2,75 раза.

   Поскольку все отношения больше 2,512, вклад звёзд каждой последующей звёздной величины (в пределах рассматриваемого интервала величин) растёт с увеличением звёздной величины. Для более слабых звёзд этот закон нарушается, иначе бы всё небо ярко светилось.

   Ответ: восьмой звёздной величины.

5. **Спелеологи-гравиметристы.** ***(М.Г. Гаврилов, 1992, редакция 2000.)*** Спелеологи должны проводить измерения силы тяжести в различных точках на поверхности земли. Тогда в том случае, когда под ними находится некоторая полость радиуса R (объём пустого пространства – пространства, где плотность составляет не ρ_0, а 0), сила тяжести будет меньше. Для простоты рассмотрим шарообразную полость. Тогда в том случае, когда прямо под спелеологами находится полость радиуса R (то есть, пространство объёма $4/3\cdot\pi\cdot R^3$, где плотность составляет не ρ_0, а 0), сила тяжести будет меньше на величину

$$\Delta g = G\cdot\Delta M/L^2 = G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R^3/L^2,$$

где L – расстояние от точки измерения до центра этой шаровой полости. Очевидно, наибольший эффект будет заметен тогда, когда $L \approx R$, то есть полость почти касается земной поверхности. В этом случае

$$\Delta g = G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R^3/R^2 = G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R.$$

Поскольку период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\cdot(l/g)^{1/2},$$

то изменение величины g на Δg приведёт к изменению периода колебаний маятника на величину $\Delta T/T = -(\Delta g/g)/2$. Таким образом:

$$2\Delta T/T = -(G\cdot\Delta\rho\cdot4/3\cdot\pi\cdot R) / g.$$

Поскольку $\Delta\rho = 0 - \rho_0 = -\rho_0$, получаем

$$2\Delta T/T = (G\cdot\rho_0\cdot4/3\cdot\pi\cdot R) / g,$$

Откуда:

$$R = (3/2\pi)\cdot(\Delta T/T)\cdot g / (G\cdot\rho_0).$$

Если предел чувствительности гравиметра составляет $2\cdot10^{-5}$ %, то есть $\Delta T/T = 2\cdot10^{-7}$, то радиус полости, измеряемый на пределе чувствительности получается равным 5,0 метров.

Ответ: полость с характерным размером (диаметром) порядка 10 метров.

6. **Толщина солнечного паруса.** ***(М.Г. Гаврилов, 2002.)*** Обозначим толщину паруса через d. Масса паруса равна: $M_П = \rho\cdot d\cdot S$, $d = M_П / \rho\cdot S$. Разумно предположить, что зеркальные свойства парусу обеспечивают металлические характеристики его материала; это даёт возможность оценить порядок плотности материала ρ: от $2\cdot10^3$ кг/м^3 до $2\cdot10^4$ кг/м^3. Для оценки возьмём плотность алюминия $\rho = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3. Очевидно также, что масса паруса входит в упомянутые 10 тонн всего комплекса. Для оценки возьмём половину этой величины, $M_П = 5\cdot10^3$ кг. При таких оценочных подсчётах площадь в 7 654 321 м^2 следует округлить по крайней мере до 7,7 км^2. Получаем:

$$d = 5\cdot10^3 \text{ кг} / (2{,}7\cdot10^3 \text{ кг/м}^3\cdot7{,}7\cdot10^6 \text{ м}^2) \approx 2{,}4\cdot10^{-7} \text{ м} \approx 1/4 \text{ мкм}.$$

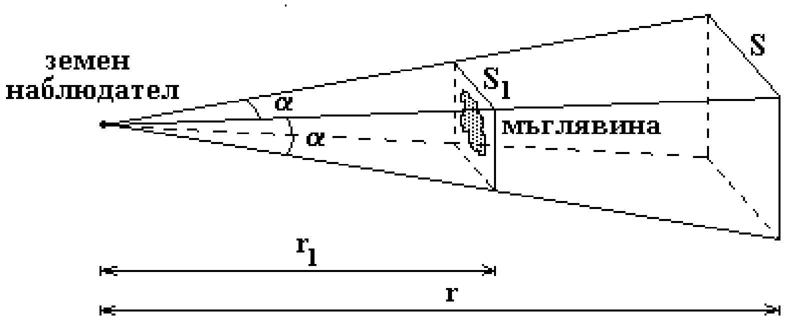
Величина, наверно, достижимая для технологий недалёкого будущего.

Примечание: правильными следует считать ответы в диапазоне от 0,03 до 0,4 мкм.

Теоретический тур

11 класс.

1. **Звёзды и туманность.** ***(Е.С. Божурова в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Почему на фоне туманности плотность звёзд меньше? Очевидно, потому, что часть их загораживает туманность (по-болгарски – "мъглявина").



Звёзды, регистрируемые на каждом из двух исследуемых участков снимка, принадлежат области пространства с формой пирамиды и определённым объёмом. Фотоаппарат болгарских астрономов находится в вершине пирамиды (точка «земен наблюдател»), основанием которой является часть сферы с радиусом, равным расстоянию до самых отдалённых звёзд, зарегистрированных на фотографии. По условию задачи звёзды равномерно распределены в пространстве, следовательно, число звёзд на данном участке снимка пропорционально объёму соответствующей пирамиды. Объём пирамиды с высотой h и площадью основания S есть:

$$V = h \cdot S / 3.$$

Для простоты рассмотрим участки с малыми угловыми размерами: такими, что можно не учитывать кривизну оснований соответствующих пирамид. Также для простоты сравним пирамиды с квадратными основаниями, пусть угловая длина сторон этих квадратов – α. Тогда высоты пирамид можно принять равными расстоянию до самых отдалённых звёзд, которые видны в соответствующих областях фотоснимка. Для случая на фоне туманности это r_1 – расстояние до туманности (так как она непрозрачная), а для случая вне туманности это r – расстояние до звёзд 15^m. Линейные длины сторон оснований двух пирамид равны $\alpha \cdot r_1$ и $\alpha \cdot r$, а площади этих оснований $S_1 = (\alpha r_1)^2$ и $S = (\alpha r)^2$. Объёмы этих двух пирамид:

$$V_1 = r_1 \cdot (\alpha r_1)^2 / 3 = \alpha^2 r_1^3 / 3,$$

$$V = r \cdot (\alpha r)^2 / 3 = \alpha^2 r^3 / 3.$$

Отношение числа звёзд в них:

$$N_1 / N = V_1 / V = (r_1 / r)^3$$

Из этого равенства получаем формулу для соотношения расстояний r_1 и r :

$$r_1 = r\,(N_1 / N)^{1/3}.$$

Чтобы найти расстояние r до самых слабых звёзд, используем классическую формулу, связывающую абсолютную звёздную величину M и видимую звёздную величину m. В нашем случае $M = 5^m$ для всех звёзд, а видимая звёздная величина самых слабых звёзд на снимке $m = 15^m$.

$$5 \lg r - 5 = m - M,$$

$$lg\, r = (m - M + 5) / 5,$$

$$lg\, r = 3,$$

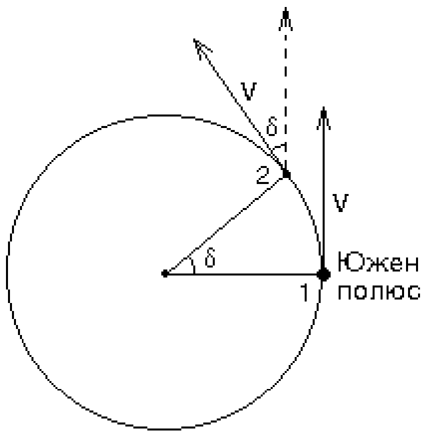
$$r = 1000 \text{ пк}.$$

Учитывая, что $N_1 / N = 10$, получаем :

$$r_1 = r\,(1/10)^{1/3} \approx 460 \text{ пк}.$$

Примечание: даже если бы мы учли кривизну оснований пирамид и рассмотрели бы произвольные формы их оснований (использовали точную формулу для объёма сферического сектора), результат получился бы точно такой же.

2. **Путешествия у полюса.** ***(Е.С. Божурова в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Двигаясь со скоростью 2 км/ч, участники экспедиции за 24 часа далеко не уйдут. Даже, если бы они шли по прямой, – и то, удалились бы не более, чем на 48 км. Поэтому мы можем не учитывать кривизну земного шара и считать, что полярники движутся по плоскости. Вектор их скорости всё время направлен к звезде Сириус. Сириус участвует в видимом суточном движении небесной сферы и за 24 часа проходит по небу приблизительно 361°. Дополнительный градус появляется потому, что звезда делает полный оборот не за 24 часа (солнечные сутки), а примерно за $23^ч 56^м$ (звёздные сутки, точнее – $24^ч \times 365{,}26 / 366{,}26 = 23^ч 56^м 04^с$). За остающиеся почти 4 минуты до окончания 24-го часа звезда проходит ещё около $(4^м : 60) \times 15° = 1°$. Следовательно, вектор скорости полярников равномерно вращается, отслеживая направление на Сириус и делая один полный оборот за одни звёздные сутки. По величине скорость движения полярников остаётся постоянной. Это означает, что они движутся по окружности длиной $23^ч 56^м 04^с \times 2$ км/ч $= 47{,}869$ км и радиусом $47{,}869 / 2\pi = 7{,}621$ км. Центр этой окружности находится в стороне от полюса. То есть, через звёздные сутки полярники вновь окажутся на полюсе, а за оставшиеся до окончания 24-го часа почти 4 минуты пройдут ещё 131 м.



При движение по окръжност, ако за даден интервал от време радиус-векторът на движещата се точка се завърти на ъгъл δ, то и векторът на скоростта се завърта на същия ъгъл δ.

3. **Разрешающая способность.** ***(А.В. Засов в редакции М.Г. Гаврилова, 2002.)*** Из ограничения на разрешающую способность следует, что атмосфера меняет направление проходящих сквозь нее лучей случайным образом в пределах угла 0,5″. Оптические свойства рассеивающего слоя не зависят от того, с какой стороны от него находится источник. Поэтому свет, идущий от любой точки на поверхности Земли, также будет рассеиваться на тот же угол. Если даже предположить, что все рассеяние происходит на высоте 2 км, то «размазка» изображения деталей земной поверхности будет соответствовать диаметру

$$2000 \text{ м} \cdot \sin(0{,}5'') \approx 2000 \text{ м} \cdot 0{,}5 / 2\cdot 10^5 = 5\cdot 10^{-3} \text{ м} = 5 \text{ мм}.$$

Если же учесть, что 2 км – это предельная высота рассеивающих слоев атмосферы, а средняя высота заведомо ниже, то можно рассматривать полученную оценку как верхний предел линейной разрешающей способности. С высоты 200 км отрезок полученного размера будет виден под углом в 100 раз меньшим, чем с высоты 2 км, то есть под углом уже не 1/2, а 1/200 угловой секунды. Дифракционная разрешающая способность δ в оптической области спектра составляет примерно λ/D, где λ – длина волны видимого света, примерно равная 5000 Å = $5\cdot10^{-7}$ м. Чтобы дифракция на краях объектива не мешала реализовать разрешающую способность в $\delta = 1''/200 \approx (1''/200)\cdot(1\text{ рад}/200000'') = 2{,}5\cdot10^{-8}$ рад, надо иметь диаметр объектива телескопа $D = \lambda/\delta \approx 5\cdot10^{-7}\text{ м} / 2{,}5\cdot10^{-8} = 20$ м. До осуществления таких возможностей пока далеко. Реально иметь космический телескоп с диаметром 1 м и разрешающей способностью 0,1″. Для него при наблюдении земной поверхности разрешение составит 10 см. Даже очень неспокойная атмосфера не помешает её реализовать.

4. **Эффект Ярковского.** ***(В.Г.Сурдин, 1999, в редакции М.Г.Гаврилова, 2002.)*** Рассмотрим наиболее простой случай: ось вращения астероида параллельна его орбитальной оси. Тогда прямое вращение астероида (в направлении орбитального обращения) приводит к тому, что нагретая сторона оказывается сзади (по отношению к орбитальному движению). Излучение более нагретой стороны больше, чем менее нагретой, поэтому возникает разность давлений этого излучения, результирующая сила которого направлена по курсу движения астероида. Поэтому образовавшийся естественный «фотонный двигатель» ускоряет движение астероида. Это приводит к поднятию его орбиты и приближает астероид к орбите Юпитера.

   Аналогично, обратное вращение астероида за счёт фотонной отдачи приближает его к орбите Марса.

   В случае, когда ось вращения астероида наклонена по отношению к его орбитальной оси, ситуация промежуточная. Но главная особенность сохраняется – при прямом вращении астероида его нагретая сторона оказывается в основном сзади, при обратном – в основном спереди. Поэтому качественно эффекты будут такими же, как в случае со строго параллельными осями вращения.

5. **Солнечный парус**. ***(М.Г. Гаврилов, 1999.)*** Сразу заметим, что если площадь паруса не меняется, то число падающих на этот парус фотонов обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца и сила светового давления на парус является центральной, то есть $F \sim 1/R^2$. Это означает, что движение корабля будет подчиняться законам Кеплера, только «эффективность притяжения» Солнца уменьшится. Иными словами, корабль будет двигаться так же, как он бы двигался в случае уменьшения массы Солнца с M_0 до M_1. То есть, движение корабля с раскрытым парусом до Марса проходило по эллипсу, перигелий которого находился на орбите Земли (расстояние от Солнца – R_0), а на орбите Марса (расстояние от Солнца – R_1) – очевидно, афелий (поскольку совершено пол-оборота вокруг Солнца). Далее, используя II закон Кеплера и закон сохранения энергии для точек перигелия и афелия, а также выражение для кругового движения вокруг Солнца без паруса, можно получить, что новая «эффективная масса» Солнца равна:

$$M_1 = M_0\cdot(1 + R_0/R_1)/2 \approx 0{,}829\ M_0,$$

   а сила центрального притяжения уменьшилась на

$$(G\Delta M)/GM_0 \approx (1 - R_0/R_1)/2 \approx 0{,}171.$$

   Теперь найдём силу светового давления, которая приводит к такому эффекту. Энергия фотона есть $E = mc^2$, а его импульс $p = mc$, то есть, для каждого фотона $p = E/c$. Сила давления есть $\Delta P/\Delta t$ – изменение импульса системы парус-корабль за счёт всех фотонов, падающих в единицу времени на парус. По закону сохранения импульса $\Delta P/\Delta t$ равно сумме изменений импульсов всех попавших на парус фотонов: $\Delta P/\Delta t = \Sigma(\Delta p/\Delta t)$. Поскольку парус зеркальный, фотоны отражаются и меняют свой импульс на противоположный, то есть изменение импульса каждого из них Δp есть $\Delta p = 2p_0 = 2E_0/c$. Таким образом:

$$F_{давл} = \Delta P/\Delta t = (2\cdot\Delta E\ /\ \Delta t)\ /\ c.$$

Учитывая, что энергия фотонов, падающих в единицу времени на парус, находящийся на произвольном расстоянии R от Солнца:

$$\Delta E/\Delta t = A\cdot(R_0/R)^2\cdot S,$$

получаем:

$$F_{давл} = 2AS(R_0/R)^2/c.$$

И, приравнивая эту силу к $(1 - R_0/R_1)/2$ от гравитационной, имеем:

$$(1 - R_0/R_1)\cdot GM_0m/2R^2 = 2AS(R_0/R)^2/c,$$

$$(1 - R_0/R_1)\cdot GM_0m = 4ASR_0^2/c,$$

$$S = (1 - R_0/R_1)\cdot(GM_0/R_0^2)\cdot(mc/4A).$$

Рассматривая движение Земли по орбите вокруг Солнца, легко найти, что $GM_0 = 4\pi^2R_0^3/T_0^2$, где T_0 – период обращения Земли вокруг Солнца. Таким образом

$$S = (1 - R_0/R_1)\cdot(\pi^2R_0/T_0^2)\cdot(mc/A).$$

$$S = 0{,}342\cdot(\square^2\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}/10^{15})\cdot(10^4\cdot 3\cdot 10^8/1{,}4\cdot 10^3) \approx 1{,}1\cdot 10^6\ м^2 = 1{,}1\ км^2.$$

Как видим, не так уж и много.

6. **Толщина солнечного паруса.** ***(М.Г. Гаврилов, 2002.)*** Оценим теперь толщину паруса предыдущей задачи, обозначим её через d. Масса паруса равна: $M_П = \rho\cdot d\cdot S$, $d = M_П\ /\ \rho\cdot S$. Разумно предположить, что зеркальные свойства парусу обеспечивают металлические характеристики его материала; это даёт возможность оценить порядок плотности материала ρ: от $2\cdot 10^3$ кг/м^3 до $2\cdot 10^4$ кг/м^3. Для оценки возьмём плотность алюминия $\rho = 2{,}7\cdot 10^3$ кг/м^3. Очевидно также, что масса паруса входит в упомянутые 10 тонн всего комплекса. Для оценки возьмём половину этой величины, $M_П = 5\cdot 10^3$ кг. Получаем:

$$d = 5\cdot 10^3\ кг\ /\ (2{,}7\cdot 10^3\ кг/м^3\cdot 1{,}1\cdot 10^6\ м^2) \approx 1{,}7\cdot 10^{-6}\ м = 1{,}7\ мкм.$$

Величина, достижимая для современных технологий.

Примечание: правильными следует считать ответы в диапазоне от 0,2 до 3 мкм.

Для тех, кто не решил предыдущую задачу, берём площадь паруса 7,7 км^2 и ту же плотность алюминия $\square = 2{,}7\cdot 10^3$ кг/м^3:

$$d = 5\cdot 10^3\ кг\ /\ (2{,}7\cdot 10^3\ кг/м^3\cdot 7{,}7\cdot 10^6\ м^2) \approx 2{,}4\cdot 10^{-7}\ м \approx 1/4\ мкм.$$

Величина, тоже, наверно, достижимая для технологий недалёкого будущего.

Примечание: правильными следует считать ответы в диапазоне от 0,03 до 0,4 мкм.