

### III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

#### Решения задач теоретического тура

##### 8-9 класс.

1. Первый минимум звёздной величины (т.е. максимум яркости) соответствует наименьшему расстоянию от кометы до Земли - чем ближе к нам небесное тело, тем больше света (при прочих одинаковых условиях) от него до нас доходит. Второй же объясняется близостью кометы к Солнцу: во-первых, комета отражает тем больше солнечного света, чем больше его на неё попадает; а во-вторых, чем ближе комета к Солнцу, тем больше вещества "испаряется" с её ядра - голова и хвост становятся более "насыщенными".

2. Противоречия здесь нет: если в районе перигелия орбита кометы гиперболическая, то это не значит, что комета обязательно улетит за пределы Солнечной системы. Возмущения, вызываемые планетами, могут сделать орбиту замкнутой, особенно, если её эксцентриситет очень близок к единице. У нас реализовался как раз такой случай

3. Во-первых, заметим, что Солнце в полдень на высоте  $h = 72^\circ$  может находиться как к Северу от зенита, так и к Югу. Первый случай соответствует более южной местности, второй - более северной. То есть, угловое расстояние от точки Юга, которое определяется формулой

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta,$$

может быть  $h_2 = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$  и  $h_1 = 72^\circ$ .  $\delta$  - склонение Солнца, которое 19 июня (почти день летнего солнцестояния) практически  $23,5^\circ$ . Получаем два значения широты:  $\varphi_{12} = 90^\circ - h_{12} + \delta$ ,

$$\varphi_1 = 41,5^\circ, \varphi_2 = 5,5^\circ$$

Полдень в местности Вашего приземления наступил в 8 часов 42 минуты Московского летнего времени, то есть, - в 4 часа 42 минуты по Гринвичу. Это говорит о том, что Вы находитесь к востоку от Гринвича, где наступление среднего астрономического полдня наступает (по Гринвичу) во время  $\tau = 12^h - \lambda \cdot (1^h/15^\circ)$ , где  $\lambda$  - восточная долгота местности.

$$\lambda = (12^h - \tau) \cdot 15^\circ/1^h \approx 109^\circ 30' \text{ в.д.}$$

Поправка, связанная с уравнением времени в середине июня незначительна, около  $+1'$ . С этой поправкой средний астрономический полдень наступает на 1 минуту раньше истинного, в  $8^h 41^m$ . Уточнённая долгота местности  $\lambda \approx 109^\circ 45' \text{ в.д.}$

Таким образом, возможны две точки Вашего приземления:

$$41,5^\circ \text{ с.ш.}, 109^\circ 45' \text{ в.д.}$$

$$5,5^\circ \text{ с.ш.}, 109^\circ 45' \text{ в.д.}$$

Посмотрев на карту, обнаруживаем, что второй вариант отпадает - там просторы Южно-Китайского моря и "приземлиться" невозможно. Первый вариант - территория центральной части автономного района "Внутренняя Монголия" Китая, до посольства в Пекине около 550 км и

### III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

дорогу надо спрашивать по-китайски (ну а если Вы им не владеете - попробуйте спросить по-английски, надеемся, им Вы владеть будете).

4. Из третьего закона Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3},$$

следовательно, чем меньше радиус орбиты космического корабля, тем меньше период его обращения вокруг Солнца, и минимальному периоду обращения соответствует минимальный радиус орбиты. А минимальный радиус орбиты корабля, если он нестораем, есть просто радиус Солнца:

$$a_{\min} = R_{\text{Солнца}} = \frac{\alpha}{2} R_{\text{Солнце-Земля}};$$

$$\frac{T_{\min}^2}{a_{\min}^3} = \frac{T_{\text{Земли}}^2}{R_{\text{Земли}}^3};$$

$$T_{\min}^2 = T_{\text{Земли}}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^3;$$

$$T_{\min} = T_{\text{Земли}} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{3/2};$$

$$T_{\min} = 365.25 \cdot (4.65 \cdot 10^{-3}) \approx 0.116 \text{ сут} \approx 2 \text{ часа } 47 \text{ минут}$$

5. Разность упомянутых в условии звёздных величин

$$\Delta m = m_f - m_m = 17 - (-13) = 30 \quad (=5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5)$$

говорит о том, что поток света от фонаря на расстоянии 250 м в

$$100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000\,000\,000$$

раз больше, чем поток света от всех фонарей Калуги на расстоянии от Земли до Марса в противостоянии (0,38 а.е. = 57 000 000 км). Поток света от одного фонаря при приближении с 57 000 000 км до 250 м увеличивается в

$$(57\,000\,000 \text{ км} / 250 \text{ м})^2 \approx 52\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ раз.}$$

Следовательно, в Калуге ночью горит около  $52\,000\,000\,000\,000\,000 / 1\,000\,000\,000\,000 = 52\,000$  фонарей.

6. Скорости космонавтов будут не одинаковы только потому, что Луна вращается вокруг оси. Луна обращена к Земле одной стороной, поэтому период осевого вращения Луны равен периоду ее обращения вокруг Земли (T). Относительная скорость будет равна удвоенной экваториальной скорости осевого вращения:

$$V = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot R}{T},$$

где R - радиус Луны. Подставляя  $T = 27,3 \text{ сут} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ с}$ ,  
 $R = 1740 \text{ км} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$ , получаем:

$$V = 9.3 \text{ м/с.}$$

III Российская олимпиада школьников  
по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

Решения задач теоретического тура

10 класс.

1. Ниже всего Солнце опускается в полночь, в Северном полушарии его "полуночная" высота находится по формуле

$$h = \varphi - 90^\circ + \delta,$$

где  $\delta$  – склонение Солнца. Если  $h$  имеет отрицательное значение, – это означает, что Солнце под горизонтом. Наибольшее склонение Солнце имеет 22 июня,  $\delta = \varepsilon = 23^\circ 27'$ . Граница территории, на которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки, находится из этого уравнения при  $h = -12^\circ$  и  $\delta = \varepsilon$ :

$$\varphi = -12^\circ + 90^\circ - 23^\circ 27', \quad \varphi = 54^\circ 33'.$$

Заметим, что эта параллель проходит по северной части Калуги (для центра Калуги  $\varphi = 54^\circ 31'$ ).

2. Противоречия здесь нет: если в районе перигелия орбита кометы гиперболическая, то это не значит, что комета обязательно улетит за пределы Солнечной системы. Возмущения, вызываемые планетами, могут сделать орбиту замкнутой, особенно, если её эксцентриситет очень близок к единице. У нас реализовался как раз такой случай.

3. Из таблицы видим, что эксцентриситет орбиты кометы очень близок к единице, то есть орбита является практически параболической. Следовательно, скорость в перигелии в  $2^{1/2}$  больше круговой с тем же радиусом. Из таблицы находим, что он равен  $0,230$  а.е., то есть  $a_1/a_2 = 0,230$ .

Обозначив эту величину через  $\alpha$ , из третьего закона Кеплера, сравнивая с орбитой Земли:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_{\text{Земли}}^2}{a_{\text{Земли}}^3}$$

получаем

$$a_1 = \alpha \cdot a_{\text{Земли}} \quad \text{и} \quad T_1 = \alpha^{3/2} \cdot T_{\text{Земли}}.$$

$$V_I = \frac{2\pi a_1}{T_1} = \frac{2\pi \alpha a_3}{\alpha^{3/2} T_3} = \frac{2\pi a_3}{\alpha^{1/2} T_3}.$$

$$V_{II} = 2^{3/2} \frac{\pi a_3}{\alpha^{1/2} T_3}.$$

Численный ответ:  $V_{II} = 87,8$  км/с.

4. Из третьего закона Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

следовательно, чем меньше радиус орбиты космического корабля, тем меньше период его обращения вокруг Солнца, и минимальному периоду

### III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

обращения соответствует минимальный радиус орбиты. А минимальный радиус орбиты корабля, если он нестораем, есть просто радиус Солнца:

$$a_{\min} = R_{\text{Солнца}} = \frac{\alpha}{2} R_{\text{Солнце-Земля}} ;$$

$$\frac{T_{\min}^2}{a_{\min}^3} = \frac{T_{\text{Земли}}^2}{R_{\text{Земли}}^3} ;$$

$$T_{\min}^2 = T_{\text{Земли}}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^3 ;$$

$$T_{\min} = T_{\text{Земли}} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{3/2} ;$$

$$T_{\min} = 365.25 \cdot (4.65 \cdot 10^{-3}) \approx 0.116 \text{ сут} \approx 2 \text{ часа } 47 \text{ минут}$$

5. За 4000 лет длина суток фактически увеличится на 0,068 секунды. Следовательно, при расчётах всего периода предыдущих 4000 лет нужно использовать среднюю длину суток, которая на 0,034 секунды короче нынешних. Земля сделала не 1460976,8 оборотов (что получается из расчета по современной продолжительности суток), а на 0,57 оборота больше. То есть, если мы пренебрегаем замедлением вращения Земли, то расчеты солнечного затмения дадут, например, точку в Тихом океане, вместо Атлантического.

6. Рассмотрим по отдельности три возможных случая:

1. Лучевая скорость пульсара направлена от наблюдателя,
2. Лучевая скорость пульсара направлена к наблюдателю,
3. Лучевая скорость пульсара в момент наблюдения равна нулю.

В первом случае пульсар удаляется от Земли, и с ростом расстояния до наблюдателя угол между вектором его лучевой скорости и вектором полной скорости уменьшается. Следовательно, скорость удаления пульсара от наблюдателя медленно возрастает, поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

Во втором случае пульсар приближается к Земле, и с уменьшением расстояния до наблюдателя угол между вектором его лучевой скорости и вектором полной скорости возрастает. Следовательно, скорость приближения пульсара к наблюдателю медленно уменьшается, поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

В третьем случае пульсар начинает медленно удаляться от Земли, его лучевая скорость возрастает от нулевого значения. Поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

Таким образом, во всех случаях должно наблюдаться медленное уменьшение частоты импульсов пульсара. Кстати, по своей ожидаемой величине оно вполне доступно измерениям для не очень далеких пульсаров и лишь медленное торможение вращения радиопульсаров, также приводящее, к уменьшению частоты импульсов, затрудняет наблюдательное обнаружение рассматриваемого здесь эффекта.

### III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

#### Решения задач теоретического тура

##### 11 класс.

1. Ниже всего Солнце опускается в полночь, в Северном полушарии его "полуночная" высота находится по формуле

$$h = \varphi - 90^\circ + \delta,$$

где  $\delta$  – склонение Солнца. Если  $h$  имеет отрицательное значение, – это означает, что Солнце под горизонтом. Наибольшее склонение Солнце имеет 22 июня,  $\delta = \varepsilon = 23^\circ 27'$ . Граница территории, на которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки, находится из этого уравнения при  $h = -12^\circ$  и  $\delta = \varepsilon$ :

$$\varphi = -12^\circ + 90^\circ - 23^\circ 27', \quad \varphi = 54^\circ 33'.$$

Заметим, что эта параллель проходит по северной части Калуги (для центра Калуги  $\varphi = 54^\circ 31'$ ).

2. Из таблицы видим, что эксцентриситет орбиты кометы очень близок к единице, то есть орбита является практически параболической. Следовательно, скорость в перигелии в  $2^{1/2}$  больше круговой с тем же радиусом. Из таблицы находим, что он равен  $0,230$  а.е., то есть  $a_1/a_2 = 0,230$ .

Обозначив эту величину через  $\alpha$ , из третьего закона Кеплера, сравнивая с орбитой Земли:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_{\text{Земли}}^2}{a_{\text{Земли}}^3}$$

получаем

$$a_1 = \alpha \cdot a_{\text{Земли}} \quad \text{и} \quad T_1 = \alpha^{3/2} \cdot T_{\text{Земли}}.$$

$$V_I = \frac{2\pi a_1}{T_1} = \frac{2\pi \alpha a_3}{\alpha^{3/2} T_3} = \frac{2\pi a_3}{\alpha^{1/2} T_3}.$$

$$V_{II} = 2^{3/2} \frac{\pi a_3}{\alpha^{1/2} T_3}.$$

Численный ответ:  $V_{II} = 87,8$  км/с.

3. Видимо, автор предполагал, что в результате эволюции Солнце станет остывать. Но 30 миллионов лет, – это очень мало даже для того, чтобы почувствовать какую-нибудь разницу в излучении Солнца по сравнению с нынешней. Это первая и главная ошибка.

Далее, в результате эволюции (конечно, гораздо позже, чем через 30 миллионов лет) Солнце должно превратиться в красный гигант с температурой 3–4 тысячи градусов. Конечно, удалённые звёзды с такой температурой кажутся нам красными; но если такое освещение (абсолютное чёрное тело с температурой  $3-4 \cdot 10^3$  К) доминирует, то человеческий глаз будет воспринимать его почти белым (вспомните, что температура спиралей лампочек накаливания ещё меньше, а освещение в комнате кажется белым, чуть желтоватым).

### III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

Ну и давайте посчитаем, какая температура будет на земле, обращающейся вокруг красного гиганта. Десятая часть неба – это, по видимому, 9 (или 18) градусов, то есть диаметр Солнца увеличился в 18 (а может быть – и более) раз, а его площадь – по крайней мере, в 324 раза. Излучение с единицы площади пропорционально четвёртой степени температуры, следовательно, по сравнению с нынешним Солнцем оно уменьшится не более чем в 16 раз. То есть, даже по самым оптимистическим оценкам, падающее на Землю излучение увеличилось в  $324/16 \approx 20$  раз. При этом температура Земли поднимется более чем в два раза, то есть по шкале Цельсия превысит  $300^\circ$ . Ничего себе "ужасный холод"!

4. Поскольку лазер оптический, можно считать, что он работает в том же спектральном диапазоне, в котором наблюдается спутник. Следовательно, траектория лазерного луча повторит траекторию луча света, соединяющего спутник с наблюдателем. Поэтому нацеливать лазер надо на видимое направление на спутник

5. Рассмотрим по отдельности три возможных случая:

4. Лучевая скорость пульсара направлена от наблюдателя,
5. Лучевая скорость пульсара направлена к наблюдателю,
6. Лучевая скорость пульсара в момент наблюдения равна нулю.

В первом случае пульсар удаляется от Земли, и с ростом расстояния до наблюдателя угол между вектором его лучевой скорости и вектором полной скорости уменьшается. Следовательно, скорость удаления пульсара от наблюдателя медленно возрастает, поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

Во втором случае пульсар приближается к Земле, и с уменьшением расстояния до наблюдателя угол между вектором его лучевой скорости и вектором полной скорости возрастает. Следовательно, скорость приближения пульсара к наблюдателю медленно уменьшается, поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

В третьем случае пульсар начинает медленно удаляться от Земли, его лучевая скорость возрастает от нулевого значения. Поэтому частота импульсов, согласно эффекту Доплера, должна падать.

Таким образом, во всех случаях должно наблюдаться медленное уменьшение частоты импульсов пульсара. Кстати, по своей ожидаемой величине оно вполне доступно измерениям для не очень далеких пульсаров и лишь медленное торможение вращения радиопульсаров, также приводящее, к уменьшению частоты импульсов, затрудняет наблюдательное обнаружение рассматриваемого здесь эффекта.

6. Пульсар и его спутник обращаются с периодом  $T$  вокруг общего центра масс, расположенного вблизи центра пульсара. Обозначим массу пульсара через  $M$ , массу спутника – через  $m$ . Принимаем, что  $m \ll M$ . Пусть  $V$  – скорость пульсара,  $V_c$  – скорость спутника, а  $R$  и  $R_c$  – радиусы их круговых орбит вокруг центра масс. Тогда, орбитальная скорость пульсара, определенная по эффекту Доплера, составит:

III Российская олимпиада школьников  
по астрономии и космической физике.

г. Калуга  
11-15-мая 1996 г.

$$V = \frac{c \cdot dP}{P} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 10^{-8} = 3 \text{ м/с}.$$

В системе отсчета, связанной с центром масс, суммарный вектор импульса спутника и пульсара равен нулю, поэтому

$$V_c \cdot m = V \cdot M, \quad \text{или} \quad m = M \cdot V_c / V$$

(тот же вывод следует и из определения положения центра масс и равенства периодов:  $R/R_c = M/m$ ,  $R_c/V_c = R/V$ ). Скорость спутника на круговой орбите всегда равна

$$V_c = \left( \frac{GM}{R_c} \right)^{1/2},$$

где  $G$  - гравитационная постоянная. Отсюда

$$T = \frac{2\pi R_c}{V_c} = 2\pi \frac{GM}{V_c^3},$$

или

$$V_c = \left( 2\pi \frac{GM}{T} \right)^{1/3}.$$

Подставляя последнее уравнение в первое, получаем:

$$m = M \cdot V \cdot \left( \frac{T}{2\pi \cdot GM} \right)^{1/3}.$$

Подставляя численные значения  $M = 4 \cdot 10^{33} \text{ кг}$ ,  $V = 3 \text{ м/с}$ ,  
 $T = 1 \text{ год} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$  и  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$ , получаем:  
 $m = 3,2 \cdot 10^{26} \text{ кг}$ , или 53 массы Земли.